**MIM2 - Algorithmes d'approximation- TD 9**

Emmanuelle Lebhar
elebhar@ens-lyon.fr - Bureau 317

***Dualité en programmation linéaire***
**24 Novembre 2003**

**Exercice 1 (Passage direct au dual dans le cas général)**
Étudiez, sur l'exemple suivant, le passage du primal au dual dans le cas non satndard, de façon directe, c'est-à-dire sans se ramener à la forme standard. Vérifiez le résultat obtenu.
Minimiser $3x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 4x_4$. Contraintes :

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\geq 10 \\ x_2 + 5x_3 + x_4 &\leq 20 \\ x_1 - 2x_4 &= 2 \end{aligned}$$

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_4 \leq 0$, et le signe de $x_3$ est indifférent.

**Exercice 2 (Relations min-max et dualité LP)**
Le problème du *flot maximum d'un réseau* est le suivant : étant donné un graphe orienté $G = (V, E)$, ayant deux sommets distingués, la *source* $s$ et le *puits* $t$, et muni de capacités positives $c : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ sur ses arcs, trouver le flot maximum qui puisse être envoyé de $s$ à $t$ sous les contraintes :

*Contraintes de capacité :* Pour tout arc $e$, le flot qui traverse $e$ est borné par la capacité de $e$, et

*Conservation du flot :* Pour tout sommet $v$, autre que $s$ et $t$, le flot total entrant dans $v$ doit être égal au flot sortant de $v$.

1. Une *coupe de $s$ à $t$* ("$s$–$t$ cut" en anglais) est définie par une partition des sommets en deux ensembles $X$ et $\overline{X}$ telle que $s \in X$ et $t \in \overline{X}$, et consiste en l'ensemble des arcs allant de $X$ à $\overline{X}$. La capacité $c(X, \overline{X})$ de la coupe $(X, \overline{X})$ est la somme des capacités de ses arcs.
   Que peut-on dire lorsque la capacité d'une coupe de $s$ à $t$ est égale à la valeur d'un flot valide ?
2. Exprimez le problème du flot maximum d'un réseau sous forme d'un programme linéaire en introduisant un arc fictif de capacité infinie de $t$ à $s$, l'objectif étant de maximiser le flot $f_{t,s}$ qui traverse cet arc (cet arc permet de symétriser le problème en soumettant $s$ et $t$ aux contraintes de flot également).

3. Pour construire le programme dual, nous introduisons les variables $d_{ij}$ et $p_i$ correspondant aux deux jeux de contraintes du primal, sur les arcs et les sommets respectivement. Nous interpréterons ces variables comme des “indicateurs de distance” sur les arcs et des potentiels sur les sommets, respectivement. Montrez que le programme dual peut s'écrire de la façon suivante :

$$\begin{array}{lrr}
\text{minimiser} & \displaystyle\sum_{(i,j)\in E} c_{ij}d_{ij} & \\
\text{sous les contraintes} & d_{ij} - p_i + p_j \geq 0, & (i,j) \in E \\
 & p_s - p_t \geq 1 & \\
 & d_{ij} \geq 0, & (i,j) \in E \\
 & p_i \geq 0, & i \in V
\end{array}$$

4. On suppose que, pour tout $i, j$, $d_{ij}$ et $p_i$ sont contraints à être dans $\{0, 1\}$. Notons $(\mathbf{d}^*, \mathbf{p}^*)$ une solution optimale de ce programme en nombres entiers. Démontrez que ce programme dual à variables entières encode le problème de la coupe minimum de $s$ à $t$. Comment interprétez-vous alors le programme dual d'origine ?

5. Soit $C$ une coupe de $s$ à $t$. Tout chemin de $s$ à $t$ passe par un arc de $C$. Montrez que cette observation permet d'interpréter toute solution réalisable du programme dual original comme une *coupe fractionnaire de $s$ à $t$* (”fractional $s$-$t$ cut” en anglais) : la somme des valeurs des indicateurs de distance le long des arcs de tout chemin de $s$ à $t$ est supérieure à 1.
   Nous définissions la *capacité* d'une coupe fractionnaire de $s$ à $t$, comme la valeur de la fonction objectif dual sur cette coupe.
   On sait que pour toute fonction objectif, il existe une *solution extremale* (”extreme-point solution” en anglais) optimale, i.e. une solution sommet du polyèdre défini par l'ensemble des solutions réalisables, optimale (en supposant qu'il existe une solution réalisable optimale finie). Or, on peut démontrer que toutes les solutions extrémales de notre polyhèdre sont entières à coordonnées dans $\{0, 1\}$. Qu'en déduisez-vous sur les solutions du programme dual original de ce problème ?

6. Démontrez le théorème du flot maximum et de la coupe minimum (max-flow min-cut) : *il existe toujours un flot et une coupe de $s$ à $t$ de même valeur, et la valeur d'un flot maximum est égale à la capacité d'une coupe minimum.*

7. **Théorème 1 (Conditions de complémentarité primal-dual (Complementary slackness conditions)** *Étant données* $\mathbf{x}$ *et* $\mathbf{y}$ *des solutions réalisables du primal et du dual respectivement, alors* $\mathbf{x}$ *et* $\mathbf{y}$ *sont optimales ensemble ssi les conditions suivantes sont toutes satisfaites :*

   **Conditions de complémentarité primales**
   *Pour tout* $1 \leq j \leq n$ : $x_j = 0$ *ou* $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i = c_j$ ; *et*

   **Conditions de complémentarité duales**
   *Pour tout* $1 \leq i \leq m$ : $y_i = 0$ *ou* $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$.

Soient $\mathbf{f}^*$ une solution optimale du programme primal (i.e., un flot de $s$ à $t$ maximum), $(\mathbf{d}^*, \mathbf{p}^*)$ une solution optimale entière du programme dual, et $(X, \overline{X})$ la coupe de $s$ à $t$ définie par $(\mathbf{d}^*, \mathbf{p}^*)$.
Donnez la valeur de $\mathbf{f}^*_{ij}$ où $(i, j)$ est un arc tel que $i \in X$ et $j \in \overline{X}$. Puis celle de $\mathbf{f}^*_{kl}$, avec $(k, l)$ un arc tel que $k \in \overline{X}$ et $l \in X$. Qu'en concluez vous sur les arcs allant de $X$ à $\overline{X}$ ?