1. Potencias y Logaritmos

1.1. **Definición. (Recuerdo).** Si $a \in \mathbb{R}_+^*$ y $n \in \mathbb{N}$. Se define la potencia a^n en forma recursiva por

$$\begin{cases} a^0 &= 1 \\ a^{n+1} &= a^n \cdot a \end{cases}$$

Propiedades:

(1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $1^n = 1$

(2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $(ab)^n = a^n b^n$

(3) $\forall n \in \mathbb{N}$, $a^n > 0$

(4) $\forall n \in \mathbb{N}$, $(a/b)^n = a^n/b^n$

(5) $(\forall h > -1)\,(\forall n \in \mathbb{N})$ $(1+h)^n \geq 1 + nh$ (Desigualdad de Bernoulli)

(6) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall a > 1$, $a^n > 1$

(7) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall a \in (0,1)$, $a^n \in (0,1)$

1.2. **Definición. (Recuerdo).** Si $a \in \mathbb{R}_+^*$ y $n \in \mathbb{N}$. Se define la potencia a^{-n} simplemente como

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Con esto quedan definidas todas las potencias de base estrictamente positiva y exponente entero.

Propiedades.

(1) $\forall k \in \mathbb{Z}$, $1^k = 1$

(2) $\forall k \in \mathbb{Z}$, $(ab)^k = a^k b^k$

(3) $\forall k \in \mathbb{Z}$, $a^k > 0$

(4) $\forall k \in \mathbb{Z}$, $(a/b)^k = a^k/b^k$

(5) $\forall k \in \mathbb{Z}$, $a^k \cdot a = a^{k+1}$.

Proof. Si $k \in \mathbb{N}$ la proposicion es cierta por definición. Solo debe probarse la proposición para $k = -n$ donde $n \in \mathbb{N}^*$.

En efecto

$$\begin{aligned} a^{-n} \cdot a &= \frac{1}{a^n} \cdot a \\ &= \frac{1}{a^{n-1} \cdot a} \cdot a \\ &= a^{-n+1} \end{aligned}$$

□

(6) $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, $a^{k_1} \cdot a^{k_2} = a^{k_1+k_2}$.

Proof. Si $k_2 = n \in \mathbb{N}$ la proposicion se prueba por inducción:

$n = 0$: PDQ $\forall k_1 \in \mathbb{Z}$, $a^{k_1} \cdot a^0 = a^{k_1}$. Directo de $a^0 = 1$.

Si $\forall k_1 \in \mathbb{Z}$, $a^{k_1} \cdot a^n = a^{k_1+n}$, para algún $n > 0$, PDQ $\forall k_1 \in \mathbb{Z}$, $a^{k_1} \cdot a^{n+1} = a^{k_1+n+1}$. En efecto

$$\begin{aligned} a^{k_1} \cdot a^{n+1} &= a^{k_1} \cdot a^n \cdot a \\ &= a^{k_1+n} \cdot a \\ &= a^{k_1+n+1}. \end{aligned}$$

Si $k_2 = -n$, $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} a^{k_1} \cdot a^{k_2} &= a^{k_1} \cdot a^{-n} \\ &= \frac{a^{k_1}}{a^n} \\ &= \frac{a^{k_1-n+n}}{a^n} \\ &= \frac{a^{k_1-n} \cdot a^n}{a^n} \\ &= a^{k_1-n} \\ &= a^{k_1+k_2}. \end{aligned}$$

□

(7) Si $a > 1$ entonces la función $f(k) = a^k$ es creciente en $\mathbb{Z}$.

Proof. Si $k_1 < k_2$ entoces

$$a^{k_2} = a^{k_1+(k_2-k_1)} = a^{k_1} \cdot \underbrace{a^{(k_2-k_1)}}_{(>1)} > a^{k_1}$$

$\square$

(8) Si $0 < a < 1$ entonces la función $f(k) = a^k$ es decreciente en $\mathbb{Z}$.

(9) $(\forall a > 1)\,(\forall b > 0)\,(\exists n \in \mathbb{N})\,,\ a^n > b > a^{-n}$. Es decir, si $a > 1$, la función $f(k) = a^k$ no es acotada superiormente y $\inf_{k\in\mathbb{Z}} f(k) = 0$.

(10) Idem si $a \in (0,1)$. Es decir, $(\forall a \in (0,1))\,(\forall b > 0)\,(\exists n \in \mathbb{N})\,,\ a^n < b < a^{-n}$. De aqui tambien se deduce que en el caso $0 < a < 1$, la función $f(k) = a^k$ no es acotada superiormente y $\inf_{k\in\mathbb{Z}} f(k) = 0$.

(11) $(\forall a \in (0,1))\,(\forall n \in \mathbb{N})\ (\exists b \in (0,1))\ \ a < b^n < 1$

1.3. **Definición de Raíz enesima.** Si $a \in \mathbb{R}_+^*$ y $n \in \mathbb{N}^*$. Se define la raiz enesima de a por

$$\sqrt[n]{a} = \sup\{x \in \mathbb{R}_+ / x^n \leq a\}$$

Observaciones.

(1) El conjunto $A = \{x \in \mathbb{R}_+ / x^n \leq a\}$ es NO vacio. ($\min\{1,a\} \in A$)

(2) El conjunto $A = \{x \in \mathbb{R}_+ / x^n \leq a\}$ es acotado superiormente ($\max\{1,a\}$ es cota superior de A)

(3) $\sqrt[n]{a}$ es la única solución positiva de la ecuación $x^n = a$.

Propiedades.

(1) $\sqrt[n]{1} = 1$

(2) $x = \sqrt[n]{a} \Longleftrightarrow x > 0 \wedge x^n = a$

(3) $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ (Dem. usando (2))

(4) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$

(5) $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n\cdot m]{a^m}$

(6) $0 < a < b \Rightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$

(7) $a > 1,\ n < m \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[m]{a}$

(8) $0 < a < 1,\ n < m \Rightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[m]{a}$

(9) $a > 1 \Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n \in \mathbb{N})\,,\ \sqrt[n]{a} < 1 + \varepsilon$

(10) $a > 1 \Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n \in \mathbb{N})\,,\ \sqrt[n]{\frac{1}{a}} > 1 - \varepsilon$

(11) $\inf \sqrt[n]{a}; a > 1, n \in \mathbb{N} = 1$

(12) Si $a > 1$ entonces $\inf \sqrt[n]{a}; n \in \mathbb{N} = 1$ y $\sup \sqrt[n]{a}; n \in \mathbb{N} = a$

(13) Si $0 < a < 1$ entonces $\inf \sqrt[n]{a}; n \in \mathbb{N} = a$ y $\sup \sqrt[n]{a}; n \in \mathbb{N} = 1$

1.4. **Definición de potencias de exponente Racional.** Si $a \in \mathbb{R}_+^*$ y $q \in \mathbb{Q}$. Se define la potencia a^q por

$$a^q = \sqrt[n]{a^m}$$

donde $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$ son tales que $\frac{m}{n} = q$.

Obs: si $(m_1, n_1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ y $(m_2, n_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ son dos representaciones de q entonces

$$\sqrt[n_1]{a^{m_1}} = \sqrt[n_2]{a^{m_2}}$$

Propiedades:

(1) $a^q > 0$

(2) $a^p a^q = a^{p+q}$

(3) $(a^p)^q = a^{pq}$

(4) $(ab)^p = a^p b^p$

(5) $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$

(6) $a > 1,\ p < q \Rightarrow a^p < a^q$ (La función $f(q) = a^q$ es creciente en $\mathbb{Q}$ cuando la base $a > 1$)

(7) $0 < a < 1,\ p < q \Rightarrow a^p > a^q$(La función $f(q) = a^q$ es decreciente en $\mathbb{Q}$ cuando la base $a < 1$)

1.5. **Definición de potencia de exponente real.** Si $a > 1$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Se define la potencia a^α por

$$a^\alpha = \sup\{a^q / q \in \mathbb{Q},\ q \le \alpha\}.$$

Si $a \in (0,1)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Se define la potencia a^α por

$$a^\alpha = \inf\{a^q / q \in \mathbb{Q},\ q \le \alpha\}.$$

Además, si $\alpha \in \mathbb{R}$. Se define $1^\alpha = 1$.

Obs: Si $\alpha \in \mathbb{Q}$ esta nueva definición coïncide con la anterior.

Propiedades:

(1) $a^\alpha > 0$

(2) $a > 1,\ \alpha < \beta \Rightarrow a^\alpha < a^\beta$ (La función $f(x) = a^x$ es creciente en $\mathbb{R}$ cuando la base $a > 1$)

(3) $0 < a < 1,\ \alpha < \beta \Rightarrow a^\alpha > a^\beta$(La función $f(x) = a^x$ es decreciente en $\mathbb{R}$ cuando la base $a < 1$)

(4) $a^x a^y = a^{x+y}$

(5) $(a^x)^y = a^{xy}$

(6) $(ab)^x = a^x b^x$

(7) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

(8) $(\forall a \neq 1)\left(\forall y \in \mathbb{R}_+^*\right)(\exists x \in \mathbb{R})\ a^x = y$

1.6. **Definición de Logaritmo en base** a**.** Dado $a \neq 0$ la función $f(x) = a^x$ es biyectiva de $\mathbb{R}$ a valores en $\mathbb{R}_+^*$. Luego tiene inversa llamada función Logaritmo en base a, anotada

$$\begin{array}{rcl} \log_a : \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & y = \log_a x \ \ (\Leftrightarrow x = a^y) \end{array}$$

Propiedades.

(1) $\mathrm{Dom}(\log) = \mathbb{R}_+^*$

(2) $\mathrm{Im}(\log) = \mathbb{R}$

(3) $\forall x, y > 0$, $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

(4) $\forall x, y > 0$, $\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$

(5) $\forall x > 0$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\log_a(x^\alpha) = \alpha \log_a(x)$

(6) $\forall a, b \in (0,1) \cup (1, \infty), \forall x > 0$, $\log_a(x) = \dfrac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$