THESE

présentée par

GORMAZ ARANCIBIA, Raúl

pour obtenir le titre de

DOCTEUR
DE L'UNIVERSITE JOSEPH FOURIER - GRENOBLE 1
(arrêtés ministériels du 5 Juillet 1984 et du 30 Mars 1992)

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Floraisons Polynomiales :
Applications à l'étude des B-splines
à plusieurs variables

Date de soutenance : 17 juin 1993

Composition du jury :

J. BLUM	U. Joseph Fourier	Président
A. LE MEHAUTE	U. de Nantes	Rapporteurs
P. SABLONNIERE	INSA de Rennes	
P.-J. LAURENT	U. Joseph Fourier	Examinateurs
F. UTRERAS	U. de Chile	

Thèse préparée au sein du laboratoire LMC-IMAG

Remerciements

Je remercie, avant toute autre chose, ma belle famille, Mónica, Pamela et Andrés. Leur compagnie et leur patience pendants ces années a été invaluable. Sans eux, cet effort n'aurait pas eu lieu.

Je remercie Monsieur Jacques Blum, Professeur à l'U.J.F., de l'honneur qu'il me fait de présider le jury.

Je remercie Monsieur Alain Le Méhauté, Professeur à l'U. de Nantes, et Monsieur Paul Sablonnière, Professeur à l'INSA de Rennes, d'avoir accepté d'être mes rapporteurs.

Je tiens à exprimer toute ma réconnaissance à Pierre-Jean Laurent, directeur de cette thèse, par son accueil chaleureux et ses encouragements qui ont été déterminants dans la poursuite de cette aventure. Son exemple en est la meilleure leçon de chercheur et maître.

Je remercie tout particulièrement Florencio Utreras, qui a reussit à me reconduire vers la recherche et l'enseignement en mathématiques, après une parenthèse de dix années "*informatiques*".

Je remercie Marie Laurence Mazur, par son aide et ses conseils qui ont contribué à l'améliorer la redaction de cette thèse.

J'addresse également mes remerciements à Guizou, qui par sa présence et gentillesse a fourni un entourement familial pendant tout notre séjour en France. Ses conseils du bon usage du français en sont aussi très apreciés.

Je tiens à remercier les membres de l'équipe de Géométrie Algorithmique de LMC pour l'environnement de travail agréable. Plus particulièrement, l'ensemble des thèsards (et quelques *ex*, je dois ajouter!) qui m'ont accueulli aussi amicalement.

Un grand merci aussi aux camarades du bureau 58, Hamid, Otman, Raj et Malek, ma maison pendants ce travail, pour leur compagnie et amitié.

à Mónica,
Pamela,
Andrés.

Table de Matières

Introduction Générale.

Les fonctions splines à une variable donnent lieu à présent à une théorie riche et robuste. Déjà dans l'année 1966 Curry et Schoenberg [CurSch66](*) ont montré, pour l'espace des fonctions splines constitué des polynômes par morceaux de degré k et de classe C^r définis sur une partition de $\mathbb{R}$, l'existence d'une base de splines à support minimal : les B-splines. Dans ce même article (qui correspond en fait à un travail développé par les auteurs 10 ans avant, mais qui est resté sans publier par manque de decision) les B-splines sont caracterisées comme volume $(n-1)$-dimensionnel des intersections d'un hyperplan avec un simplexe de $\mathbb{R}^n$. Cette caracterisation est reprise par C. de Boor [dB76] comme point de départ pour définir les splines simpliciales. Ces splines simpliciales seront rapidement utilisées dans des schémas de B-splines à plusieurs variables (voir par exemple [DahMic82], [Hg82] et [AGNS91]) mais pas avec un grand succes, peut être a cause de leur difficulté de présentation et utilisation.

D'autre part, l'algorithme de de Casteljau est devenu le modèle des algorithmes d'évaluation et donne naissance au polygone de contrôle. Ce polygone, dont ses sommets sont les points de contrôle ou pôles, permet, en le déformant, de modifier la forme de la courbe originale. L'algorithme de de Boor étend ces idées au cas des courbes splines.

Ces deux idées, B-splines et pôles, qui se complémentent très bien dans le cas unidimensionnel, n'ont pas trouvé initialement un bon accord dans le cas de plusieurs variables. Ce sont les travaux de L. Ramshaw ([Rm87] et [Rm89]), dans lesquels il travaille magnifiquement l'idée de forme polaire d'un polynôme ou floraison (blossoming) originalement proposée par P.F. de Casteljau [dCXX], qui donnent le premier indice pour cette complémentation dans le cas de plusieurs variables. Même le cas unidimensionnel, qu'il traite avec grand detail, gagne une simplicitée nouvelle. Pour le cas à plusieurs variables il donne les résultats de base, notament la caracterisation du raccordement à l'ordre r de deux patches triangulaires, et étude avec soin les surfaces splines basées sur une triangulation régulière formée par des triangles équilatèraux.

Finalement, W. Dahmen, C. A. Micchelli et H. P. Seidel proposent un schéma de B-splines [DahMicS92] qui semble marier profondement B-splines et floraison. Avec ce même schéma, H. P. Seidel [S93] montre l'équivalent du théorème dans [CurSch66] qui exprime un polynôme par morceaux comme combinaison linéaire des B-splines.

Ce parcours qui donne naissance à un schéma de B-splines à plusieurs variables est le sujet central de cette thése. Notre intérêt est double : proposer un traitement homogène de toutes ces idées et simplifier son traitement.

Le chapitre 1 introduit, après un rappel sur les espaces et fonctions affines, la notion de floraison (ou forme pôlaire) d'un polynôme. Cette no-

(*) Les références dans cette introduction générale revoient à la Bibliographie en fin d'ouvrage.

tion est utilisée systèmatiquement pour l'étudier les fonctions polynômiales. Une géneralisation de l'algorithme de de Casteljau due à H. P. Seidel ([S91a] et [S91b]) est présentée. Nous proposons ensuite une méthode de subdivision qui peut être utilisée pour la visualisation d'une surface polynômliale. Nous terminons le chapitre avec une présentation des différentes caractérisations du raccordement à l'ordre r de variétés polynômiales.

Le chapitre 2 introduit les splines simpliciales avec ses principales propriétés. Les relations de récurrence, qui sont à l'origine des méthodes d'évaluation, sont étudiées. Il s'agit d'écrire une spline simpliciale de degré k comme combinaison lináire de splines simpliciales de degré $k-1$. C'est une relation de récurrence sur le degré. Nous présentons aussi les splines coniques, généralisation au cas de plusieurs variables des puissances tronquées, introduites initialement par Dahmen [Dah80]. On retrouve l'expression d'une B-spline comme combinaison linéaire de puissances tronquées. Nous présentons ensuite les résultats de E. Cohen, T. Lyche et R. F. Riesenfeld [CoLyRie87] qui ont d'une part exprimé une spline simpliciale comme la restriction d'une spline conique à un certain hyperplan, et d'autre part, donnent une nouvelle relation de récurrence pour les splines simpliciales, cette fois sur la dimension du domaine de la spline. A la fin de ce chapitre, nous présentons une étude de la complexité des algorithmes basées sur ces relations de récurence.

Le chapitre 3 reprends le sujet des splines simpliciales, mais cette fois du point de vue des différences divisées. Une définition qui étend la définition classique est proposée pour les fonctions à plusieurs variables. On s'est basé pour ceci dans un travail de H. Hakopian [Hk82a]. Les principaux résultats sont retrouveés, en particulier celui qui exprime la différence divisée d'ordre p à partir des différences divisées d'ordre 0. Cette fois, les différences divisées d'ordre 0 ne correspondent pas à des évaluation ponctuelles de la fonction concernée, mais à des moyennes de la fonctions sur des simplexes. Ce résultat va nous permettre de retrouver l'expression des sauts de la dérivée k-ième d'une spline simpliciale de degré k. Avec cette expression, on propose un algorithme d'évaluation d'une spline simpliciale qui apparait plus performant que ceux étudiés au chapitre précedent. Cet algorithme est detaillée dans le cas de dimension 2 et des exemples numériques sont présentées.

Le chapitre 4 présente à façon de synthèse des idées originales de W. Dahmen, C.A. Micchelli et H.P. Seidel. Ils proposent un nouveau schéma de B-spline qui utilise de façon essentielle les floraisons (et donc la généralisation de l'algorithme de de Casteljau) et les splines simpliciales. Ce schèma est étudie d'abord sous la lumière d'un nouveau resultat sur le raccordement de classe C^{k-1} de polynômes de degré k. Nous démonstrons pour le cas de multiplicité 1 le résultat de H.P. Seidel qui donne une expression explicite d'un polynôme de degré k et classe C^{k-1} à partir des B-splines du schéma proposeé. Les lignes de nœuds, ensembles où se produisent les discontinuités des dérivées k-ièmes des splines simpliciales de degré k, peuvent être éliminés en combinant d'une façon précise les B-splines. Les conditions exactes pour ce faire sont obtenues par application du nouveau théorème de raccordement. Finalement, les résultats de Seidel sont présentés en soignant la clarté des raisonement et des hypothèses.

Chapitre 1. Polynômes et floraisons

Le début de ce chapitre (section 1.1) est consacré à des rappels élémentaires sur les espaces et fonctions affines. Un effort particulier a été fait dans la présentation des résultats, ainsi que dans les notations proposées. Il est clair que la plus grande difficulté du sujet réside dans la notation.

On présente ensuite (section 1.2) la notion de polynôme défini sur un espace affine puis celle de floraison, fonction multiaffine symétrique dont la diagonale redonne le polynôme. Cette notion est développée dans les travaux de L. Ramshaw ([3] et [4])

Cet outil permet une compréhension simple et naturelle des fonctions polynômiales, notamment en ce qui concerne leur représentation ainsi que leur évaluation (section 1.3). C'est la définition de B-patch, due à H.P. Seidel ([6], [7] et [8]) qui constitue l'essentiel de la section avec l'extension de l'algorithme de De Casteljau, appelée ici algorithme de Seidel-De Boor-De Casteljau.

La section 1.4 présente les rudiments des méthodes de subdivision dans le cas de variétés polynômiales. Une méthode de subdivision non traditionnelle est développée. La méthode d'insertion de nœuds proposée est due à Seidel ([8]).

Mais c'est sans doute le sujet du raccordement (section 1.5) qui mérite le plus grand intérêt. On présente d'abord le résultat de Ramshaw ([3]), qui montre toute la puissance de la notion de floraison, puis une généralisation d'un résultat dû a Seidel ([8]) est proposée. Ce sujet sera abordé à nouveau dans le chapitre 4 qui étudie la relation entre les B-splines à plusieurs variables et cette notion de floraison.

1.1 Espaces affines

Un cadre naturel pour l'étude d'ensembles de points tels qu'une courbe ou une surface, est celui des espaces affines. Sur ces espaces on peut définir la notion fondamentale de barycentre, notion qui permet de traiter les variétés affines, les fonctions affines et même la convexité.

Dans un espace affine, les vecteurs apparaissent comme différence entre deux points. Ils représentent les déplacements pour passer d'un point à un autre. Notamment la dérivée, en tant que limite de différences, est un vecteur.

Ce formalisme, bien qu'élémentaire, peut sembler excessif au lecteur. Celui-ci pourra, chaque fois qu'il lira espace affine, interpréter celui-ci comme le translaté d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et ce sous-espace vectoriel sera à son tour l'espace vectoriel associé à l'espace affine. Plusieurs textes d'algébre élémentaire traitent ce sujet, voir par exemple [1].

Définition 1.1 *On appelle* espace affine *E un ensemble non vide, dont les éléments sont appelés points, auquel sont associés, d'une part un espace vectoriel réel, noté $\vec{E}$, et d'autre part, une application :*

$$\begin{aligned} E \times \vec{E} &\longrightarrow E \\ (A, \vec{x}) &\longmapsto A + \vec{x} \end{aligned}$$

vérifiant les deux propriétés suivantes :

$$(\mathrm{Aff}-1) \quad \forall A \in E \text{ } \textit{l'application :} \quad \begin{aligned} \vec{E} &\longrightarrow E \\ \vec{x} &\longmapsto A + \vec{x} \end{aligned} \qquad \textit{est bijective.}$$

$$(\mathrm{Aff}-2) \qquad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \vec{E}, \quad \forall P \in E, \quad P + (\vec{x} + \vec{y}) = (P + \vec{x}) + \vec{y}.$$

Pour $B \in E$, le seul $\vec{x} \in \vec{E}$ tel que $A + \vec{x} = B$ (selon (Aff-1)) est noté $\vec{x} := B - A$, ou encore, $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$. Autrement dit, $A + \overrightarrow{AB} = B$ quels que soient $A, B \in E$. On dit que $P + \vec{x}$ est la translation du point P selon le vecteur $\vec{x}$.

Quelques conséquences directes de la définition :

$$(a) \qquad \forall A \in E \quad A + \vec{0} = A \quad (\Leftrightarrow A - A = \vec{0})$$

Soit $\vec{x} = A - A$, alors $A + \vec{x} = A$, donc :

$$\begin{aligned} A + \vec{0} &= (A + \vec{x}) + \vec{0} \\ &= A + (\vec{x} + \vec{0}) \\ &= A + \vec{x} \end{aligned}$$

et (Aff-1) permet de conclure que $\vec{x} = \vec{0}$.

(*b*)
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Puisque :

$$\begin{aligned} A + [\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}] &= [A + \overrightarrow{AB}] + \overrightarrow{BC} \\ &= B + \overrightarrow{BC} \\ &= C \end{aligned}$$

(*c*)
$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$$

Il suffit de prendre $A = C$ dans (b).

Remarque : Un exemple évident d'espace affine est celui d'un espace vectoriel. Il suffit d'identifier points et vecteurs et de définir la translation d'un point selon un vecteur comme la somme de vecteurs. Dans ce cas, $\overrightarrow{AB} = B - A$ au sens habituel de la différence de vecteurs et les propriétés (a), (b) et (c) deviennent triviales.

D'autre part, quand on utilise $\mathbb{R}^n$ on considère indistinctement ses éléments comme des points ou comme des vecteurs. On fera ici l'effort de séparer ces deux notions. On parlera d'un point de $\mathbb{R}^n$ quand on veut utiliser ses coordonnées pour repérer sa position dans l'espace. Alors, l'espace habituel sera identifié à $\mathbb{R}^3$ espace affine et non à $\mathbb{R}^3$ espace vectoriel.

Considérons maintenant n points $P_1, \ldots, P_n$ de E, ainsi que n réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de somme 1, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Essayons de donner un sens à l'expression
$$\sum_{i=1}^n \lambda_i P_i.$$
Il est clair que le produit isolé d'un point et d'un réel différent de 1, n'a pas de sens. Si on introduit un point auxiliaire $\mathcal{O}$, on peut procéder formellement comme suit :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda_i \,(P_i - \mathcal{O}) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \, P_i - \sum_{i=1}^n \lambda_i \, \mathcal{O} \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \, P_i - \mathcal{O}. \end{aligned}$$

On propose la définition suivante.

Définition 1.2 *Le barycentre des points $P_1, \ldots, P_n \in E$, affectés des poids $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ de somme 1 est défini par l'expression :*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i := \mathcal{O} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (P_i - \mathcal{O}).$$

Remarque : L'expression de droite a bien un sens puisqu'il s'agit d'une combinaison linéaire de vecteurs (différence de points) appliquée à un point.

Voyons que le barycentre ne dépend pas du point $\mathcal{O} \in E$ choisi. Soit $\mathcal{O}' \in E$ un point quelconque, alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i &= \mathcal{O} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (P_i - \mathcal{O}) \\
&= \mathcal{O} + (\mathcal{O}' - \mathcal{O}) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\mathcal{O} - \mathcal{O}') + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (P_i - \mathcal{O}) \\
&= \mathcal{O}' + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (P_i - \mathcal{O}').
\end{aligned}$$

On peut faire un raisonnement similaire, mais cette fois avec des “poids” $\mu_1, \ldots, \mu_n$ de somme zéro et définir :

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i P_i := \sum_{i=1}^{n} \mu_i (P_i - \mathcal{O}) \in \vec{E}.$$

Définition 1.3 *Une partie $H \subseteq E$ sera dite un sous-espace affine de E s'il existe un point $P \in E$ et un sous-espace vectoriel $\vec{H}$ de $\vec{E}$ tels que :*

$$H = P + \vec{H} = \{P + \vec{x} \mid \vec{x} \in \vec{H}\}.$$

Remarque : Il est simple de voir que le point P appartient à H et peut être remplacé par n'importe quel autre point de H. En plus, le sous-espace vectoriel $\vec{H}$ est unique et admet la représentation :

$$\vec{H} = \{B - A \mid A, B \in H\}$$

Théorème 1.4 *Une partie H de E est un sous-espace affine de E* **ssi** *quels que soient les points $P_1, \ldots, P_n \in H$, et les scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, vérifiant $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ on a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i \in H$.*

Définition 1.5 *Etant donnée une partie $G \subseteq E$, le plus petit sous-espace affine H tel que $G \subseteq H$ est appelé la variété affine engendrée par G et se note :*

$$H = \mathrm{Aff}(G).$$

Remarque : On peut prouver que la variété affine engendrée par G est donnée par

$$\mathrm{Aff}(G) = \{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i P_i \mid m \in \mathbb{N},\ \lambda_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, m,\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1,$$
$$P_i \in G,\ i = 1, \ldots, m\}$$

et que son espace vectoriel associé est :

$$\mathrm{Lin}(G) = \{\sum_{i=1}^{m} \mu_i P_i \mid m \in \mathbb{N},\ \mu_i \in \mathbb{R},\ i = 1, ..., m\ , \sum_{i=1}^{m} \mu_i = 0,$$
$$P_i \in G,\ i = 1, ..., m\}.$$

Définition 1.6 *La dimension d'un sous-espace affine (ou variété affine) est donnée par la dimension du sous-espace vectoriel associé. Dans tout ce qui suit, on supposera que les espaces affines utilisés sont de dimension finie.*

Une partie $G = \{P_0, \ldots, P_n\}$ sera dite affinement indépendante *si* $\mathrm{Aff}(G)$ *est de dimension n.*

Un Système de Coordonnées de E est la donnée d'un point $\mathcal{O}$ et d'une base $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ de $\vec{E}$.

De cette façon, $P \in E$ admet une représentation unique $[p_1, \ldots, p_n] \in \mathbb{R}^n$ en écrivant:

$$P = \mathcal{O} + \sum_{i=1}^{n} p_i \vec{e_i}.$$

Les réels $p_1, \ldots, p_n$ sont les coordonnées de $\overrightarrow{\mathcal{O}P}$ dans la base $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ de $\vec{E}$.

Si $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i$, alors :

$$\begin{aligned} P + \vec{x} &= (\mathcal{O} + \sum_{i=1}^{n} p_i \vec{e_i}) + \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e_i} \\ &= \mathcal{O} + \sum_{i=1}^{n} (p_i + x_i) \vec{e_i} \end{aligned}$$

est représenté par $[p_1 + x_1, \ldots, p_n + x_n]$. On peut donc ramener l'étude des espaces affines de dimension finie à l'étude de $\mathbb{R}^n$.

D'autre part, il est clair que $\{\mathcal{O}, \mathcal{O} + \vec{e_1}, \ldots, \mathcal{O} + \vec{e_n}\}$ est affinement indépendant. Réciproquement, si $\{P_0, \ldots, P_n\}$ est affinement indépendant, alors un système de coordonnées est celui donné par $(P_0, \{\overrightarrow{P_0 P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0 P_n}\})$.

Plus généralement, soit $X = \{P_0, \ldots, P_n\}$ affinement indépendant et soit $H = \text{Aff}(X)$. Un point $P \in H$ peut se représenter par

$$P = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i \qquad \text{avec } \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$$

si et seulement si

$$\overrightarrow{P_0P} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{P_0P_i}.$$

Puisque $\{\overrightarrow{P_0P_1}, ..., \overrightarrow{P_0P_n}\}$ est un ensemble linéairement indépendant, les λ_i sont uniques. D'où l'unicité de l'écriture de $P \in H$ comme barycentre des points $P_i \in X$.

Définition 1.7 *On appelle coordonnées barycentriques de $P \in H = \text{Aff}(X)$, où $X = \{\ P_0, \ldots,\ P_n\}$ est affinement indépendant, les $\lambda_i \in \mathbb{R}$ uniques tels que :*

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1 \quad \text{et} \quad P = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \, P_i$$

Pour un ensemble X fixé, qu'on supposera ordonné, on notera $\lambda_i(P)$ la i-ème coordonnée barycentrique du point P.

Si parmi les barycentres considérés pour construire la variété affine engendrée par X on ne considère que ceux ayant des coefficients $\lambda_i \geq 0$, on retrouve non la variété affine engendrée, mais l'enveloppe convexe de X.

Définition 1.8 *Une partie $C \subseteq E$ sera dite convexe si tout barycentre de points de C avec des coefficients $\lambda_i \geq 0$ est aussi un point de C.*

Le plus petit ensemble convexe contenant une partie $X \subseteq E$ sera appelé enveloppe convexe de X, et on le notera co$X$ *ou aussi $[X]$ dans le cas où X est fini.*

Cette dernière notation apparaît comme l'analogue de la notation pour un intervalle $[a, b]$, enveloppe convexe des extrémités a et b.

On peut vérifier que l'ensemble

$$\{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, P_i \mid m \in \mathbb{N},\ \lambda_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, m,\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1,$$
$$P_i \in X,\ i = 1, \ldots, m\}$$

est une partie convexe de E qui contient X. C'est donc l'enveloppe convexe de X.

1.2 Fonctions Affines et Polynômes

Dans cette section, une définition de fonction polynômiale dans un espace affine est proposée. On suit pour cela les travaux de L. Ramshaw ([3], [4]).

Définition 1.9 *Soient E et Q deux espaces affines. Une fonction φ de E dans Q sera dite affine si*

$$\varphi(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i P_i) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi(P_i)$$

$\forall P_1, \ldots, P_m \in E$, $\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ *tels que* $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$.

En *CAGD* (Computer Aided Geometric Design), les transformations affines se trouvent parmi les transformations les plus utilisées; une rotation, une translation ou une homothétie en sont des exemples classiques. Pour une telle transformation on peut choisir soit de calculer un barycentre et le transformer ensuite, soit de transformer chaque point et calculer le barycentre des images ensuite. Ceci sera très utile quand on introduira l'algorithme de De Casteljau (cf Section 1.3).

Si E est de dimension s et $X = \{P_0, \ldots, P_s\}$ est une famille affinement indépendante contenue dans E, toute fonction affine $\varphi : E \longrightarrow Q$ est complètement déterminée par les valeurs $\varphi(P_0), \ldots, \varphi(P_s)$, puisque pour $P \in \mathrm{Aff}\,(X)$ et pour

$$P = \sum_{i=0}^{s} \lambda_i P_i, \quad \text{avec} \quad \sum_{i=0}^{s} \lambda_i = 1$$

on a

$$\varphi(P) = \sum_{i=0}^{s} \lambda_i \varphi(P_i).$$

Réciproquement, pour tout choix de points $B_0, \ldots, B_s \in Q$, il existe une (et une seule) fonction affine φ telle que $\varphi(P_i) = B_i$, $i = 1, \ldots, s$. Il suffit de vérifier que l'application

$$P = \sum_{i=0}^{s} \lambda_i P_i \quad \longmapsto \quad \sum_{i=0}^{s} \lambda_i B_i$$

est affine. En particulier, la i-ème coordonnée barycentrique $\lambda_i(\cdot)$ est une fonction affine de E dans $\mathbb{R}$ (prendre $B_j = \delta_{ij}$). Pour $E = \mathbb{R}^s$, on peut donner une expression explicite de $\lambda_i(u)$. En effet, soit

$$d_i(u|X) = \det \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ P_0 & \ldots & P_{i-1} & u & P_{i+1} & \ldots & P_s \end{pmatrix}.$$

Il est simple de vérifier que $d_i(\cdot|X)/d_i(P_i|X)$ est affine et qu'elle coïncide avec $\lambda_i(\cdot)$ sur chaque P_j, donc partout. En plus, en notant $d(X) := d_j(P_j|X)$ qui ne dépend pas de j, on obtient la formule explicite :

$$\lambda_i(u) = \frac{d_i(u|X)}{d(X)}. \tag{1.10}$$

La relation entre fonction affine et fonction linéaire est donnée par le théorème suivant :

Théorème 1.11 *Une fonction φ de E dans Q est affine* **ssi** $\forall \mathcal{O} \in E$, $\vec{\varphi}(\cdot) := \varphi(\mathcal{O} + \cdot) - \varphi(\mathcal{O})$ *est linéaire de $\vec{E}$ dans $\vec{Q}$.*

Démonstration :

$\Rightarrow$

Voyons d'abord que $\vec{\varphi}$ ainsi définie ne dépend pas du point $\mathcal{O} \in E$ choisi. Soit $\vec{x} \in \vec{E}$ admettant l'écriture $\vec{x} = B - A$ avec $A, B \in E$. Alors, pour un point $\mathcal{O} \in E$ donné,

$$\begin{aligned} \vec{\varphi}(\vec{x}) &= \varphi(\mathcal{O} + B - A) - \varphi(\mathcal{O}) \\ &= \varphi(B) - \varphi(A). \end{aligned}$$

Considérons maintenant deux réels α_1, α_2 et deux vecteurs $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \vec{E}$. Pour $\mathcal{O} \in E$ donné, soient $x_1, x_2 \in E$ les deux points définis par $x_1 = \mathcal{O} + \vec{x}_1$ et $x_2 = \mathcal{O} + \vec{x}_2$. La linéarité de φ résulte de :

$$\begin{aligned} \varphi(\mathcal{O} + \alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2) &= \varphi\big((1 - \alpha_1 - \alpha_2)\mathcal{O} + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\big) \\ &= (1 - \alpha_1 - \alpha_2)\varphi(\mathcal{O}) + \alpha_1\varphi(x_1) + \alpha_2\varphi(x_2) \\ &= \varphi(\mathcal{O}) + \alpha_1\vec{\varphi}(\vec{x}_1) + \alpha_2\vec{\varphi}(\vec{x}_2). \end{aligned}$$

$\Leftarrow$

On peut écrire $\varphi(\mathcal{O} + \vec{x}) = \varphi(\mathcal{O}) + \vec{\varphi}(\vec{x})$. Alors

$$\begin{aligned} \varphi(\sum_i \lambda_i\, P_i) &= \varphi(\mathcal{O} + \sum_i \lambda_i\, (P_i - \mathcal{O})) \\ &= \varphi(\mathcal{O}) + \vec{\varphi}(\sum_i \lambda_i\, (P_i - \mathcal{O})) \\ &= \sum_i \lambda_i \varphi(\mathcal{O}) + \sum_i \lambda_i\, \vec{\varphi}(P_i - \mathcal{O}) \\ &= \sum_i \lambda_i\, \varphi(P_i), \end{aligned}$$

donc φ est bien affine. ∎

On remarque qu'une fonction affine peut toujours s'écrire comme la somme (translation) d'un point et d'une fonction linéaire,

$$\varphi(P) = \vec{\varphi}(P - \mathcal{O}) + \varphi(\mathcal{O}).$$

Cette fonction linéaire peut être notée $\vec{\varphi}$ puisqu'elle dépend seulement de φ et non du point $\mathcal{O} \in E$ choisi.

Pour introduire les fonctions polynômiales sur les espaces affines on a besoin de définir les fonctions multi-affines.

Définition 1.12 *Une fonction*

$$f : \underbrace{E \times \cdots \times E}_{k \text{ fois}} \longrightarrow Q$$

sera dite k-affine (ou simplement multi-affine) si elle est séparément affine par rapport à chaque argument.

On s'intéressera particulièrement aux fonctions qui peuvent s'écrire comme $F(u) = f(u, \ldots, u)$ avec f k-affine, c'est-à-dire aux diagonales des fonctions multi-affines.

Une fonction f est symétrique si elle est invariante par rapport aux permutations des arguments. Plus précisément, si $u_1, \ldots, u_k$ sont k points quelconques de E, alors f doit vérifier

$$f(u_1, \ldots, u_k) = f(u_{\sigma(1)}, \ldots, u_{\sigma(k)}),$$

pour toute permutation σ de l'ensemble $\{1, \ldots, k\}$. Il est intéressant de remarquer que, quelle que soit g k-affine, il existe toujours une fonction f k-affine et symétrique telle que :

$$g(u, \ldots, u) = f(u, \ldots, u) \qquad \forall u \in E.$$

Il suffit de prendre

$$f(u_1, \ldots, u_k) = \sum_{\sigma} \frac{1}{k!} g(u_{\sigma(1)}, \ldots, u_{\sigma(k)}),$$

où la somme est prise sur les $k!$ permutations de $\{1, \ldots, k\}$.

Définition 1.13 *On dira que $F : E \longrightarrow Q$ est une fonction polynômiale de degré k s'il existe f k-affine telle que $F(u) = f(u^k)$, où $u^k := (\underbrace{u, \ldots, u}_{k \text{ fois}})$.*

Remarque : Une fonction polynômiale de degré k peut toujours être considérée comme étant de degré $k+1$. Il suffit de prendre $\tilde{f}$ définie par $\tilde{f}(u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}) := f(u_1, \ldots, u_k)$; $\tilde{f}$ est $(k+1)$-affine et vérifie $\tilde{f}(u^{k+1}) = F(u)$.

Théorème 1.14 *Etant donné une fonction polynômiale de degré k, il existe une unique fonction f k-affine et symétrique telle que $F(u) = f(u^k)$.*

Il est clair qu'il existe au moins une fonction k-affine et symétrique vérifiant $F(u) = f(u^k)$. L'unicité découle du lemme suivant qui exprime f à partir de F.

Lemme 1.15 *Soit f k-affine et symétrique; alors*

$$f(u_1, \ldots, u_k) = \sum_{\substack{S \subseteq \{1, \ldots, k\} \\ S \neq \emptyset}} (-1)^{k-|S|} \frac{|S|^k}{k!} f\Big(\big(\frac{1}{|S|} \sum_{i \in S} u_i\big)^k\Big), \tag{1.16}$$

où $|S|$ désigne le cardinal de S.

Remarque : Cette dernière formule est appelée formule de polarité.
Démonstration : Vérifions d'abord que l'expression a bien un sens dans l'espace affine Q. Pour cela il faut vérifier l'identité

$$\sum_{\nu=1}^{k} \binom{k}{\nu} \frac{\nu^k}{k!} (-1)^{k-\nu} = 1, \tag{1.17}$$

où $\binom{k}{\nu} = k!/\nu!(k-\nu)!$ est le nombre de sous-ensembles S de cardinal ν de $\{1,\dots,k\}$.

Soit E l'opérateur défini par $E(f) = f(\cdot + 1)$. On peut vérifier par récurrence que

$$(E-1)^k f(x) = k!\,[x, x+1, \dots, x+k] f,$$

où $[x, x+1, \dots, x+k]$ représente la k-ième différence divisée par rapport aux nœuds $x, x+1, \dots, x+k$. En particulier on a $(E-1)^k (x^k) = k!$.

D'autre part, selon la formule du binôme de Newton, on peut aussi écrire

$$(E-1)^k = \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} E^\nu (-1)^{k-\nu}.$$

Cette expression pour $f(x) = x^k$ et avec $x = 0$ entraîne (1.17).

Si on écrit le terme de droite de (1.16) comme

$$\sum_{\nu=1}^{k} (-1)^{k-\nu} \frac{\nu^k}{k!} \binom{k}{\nu} \sum_{|S|=\nu} \frac{1}{\binom{k}{\nu}} F\Big(\frac{1}{\nu} \sum_{i\in S} u_i\Big),$$

il est clair que toutes les sommes correspondent à des barycentres et ont donc bien un sens.

Soit f une fonction k-affine et symétrique telle que $F(u) = f(u^k)$. La même somme peut être réécrite grâce à la k-affinité de f comme

$$\sum_{\substack{S\subseteq\{1,\dots,k\}\\ S\neq\emptyset}} \frac{(-1)^{k-|S|}}{k!} \sum_{i_1\in S} \cdots \sum_{i_k\in S} f(u_{i_1}, \dots, u_{i_k}).$$

Pour $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k) \in (\mathbb{Z}_+)^k$ et $U = \{u_1, \dots, u_k\}$, ensemble ordonné, on notera $U_\beta := (u_1^{\beta_1}, \dots, u_k^{\beta_k})$ (u_i répété β_i fois). Puisque f est symétrique, $f(u_{i_1}, \dots, u_{i_k}) = f(U_\beta)$ avec β défini par $\beta_i = \#\{j \mid i_j = i\}$. En particulier, $|\beta| := \beta_1 + \cdots + \beta_k = k$. On note qu'il y a $k!/\beta! := k!/(\beta_1! \cdots \beta_k!)$ k-uplets différents $(u_{i_1}, \dots, u_{i_k})$ qui correspondent à un même β. D'autre part, les β permis pour un sous-ensemble S sont tous ceux qui ont une composante β_i nulle chaque fois que l'indice i ne se trouve pas dans S. La somme s'écrit alors

$$\sum_S (-1)^{k-|S|} \sum_{\substack{|\beta|=k \\ i\notin S \Rightarrow \beta_i=0}} \frac{f(U_\beta)}{\beta!}$$
$$= \sum_S \sum_{\substack{|\beta|=k \\ i\notin S \Rightarrow \beta_i=0}} \frac{(-1)^{k-|S|}}{\beta!} f(U_\beta)$$

et en inversant l'ordre des sommes

$$= \sum_{|\beta|=k} \sum_{\substack{S\subseteq\{1,\ldots,k\} \\ \beta_i>0\Rightarrow i\in S}} \frac{(-1)^{k-|S|}}{\beta!} f(U_\beta)$$

Pour $\beta = (1,\ldots,1)$ le seul ensemble S possible est $S = \{1,\ldots,k\}$ et on obtient le terme $f(u_1,\ldots,u_k)$. Voyons que les autres termes s'annulent deux à deux.

Un $\beta \neq (1,\ldots,1)$ possède nécessairement au moins une composante nulle. Soit β_j cette composante. On peut alors trouver pour chaque S de la somme associée qui contienne j un autre S' dans la même somme, qui ne le contienne pas. Et puisque $|S| = |S'| + 1$, ces deux termes auront des signes opposés. ■

Définition 1.18 *Soit F une fonction polynômiale de degré k. On appelle floraison de F (ou forme polaire associée à F) l'unique fonction f, k-affine et symétrique, qui vérifie*

$$F(u) = f(u,\ldots,u)$$

pour tout point $u \in E$.

Par convention, on désignera par des lettres majuscules les fonctions polynômiales et par la lettre minuscule correspondante sa floraison.

On rappelle (voir par exemple [5]) que la dérivée (ou différentielle) d'une fonction $\varphi : E \longrightarrow Q$ en un point $P \in E$ est, lorsqu'elle existe, la fonction linéaire unique $D\varphi(P) : \vec{E} \longrightarrow \vec{Q}$ vérifiant :

$$\varphi(P+\vec{h}) = \varphi(P) + D\varphi(P)\,\vec{h} + o(\vec{h}).$$

On suppose pour cela que $\vec{E}$ et $\vec{Q}$ sont normés, et que $o(\vec{h})$ est une fonction arbitraire de $\vec{E}$ dans $\vec{Q}$ qui vérifie

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{o(\vec{h})}{||\vec{h}||} = 0.$$

Dans le cas où φ est affine, cette dérivée s'exprime tout simplement comme

$$D\varphi(P) = \vec{\varphi}.$$

La dérivée d'un polynôme de degré 1 est une constante.

La dérivée d'une fonction polynômiale évaluée en un vecteur $\vec{h}$ s'exprime en utilisant les dérivées partielles $D_i f$, dérivées des fonctions affines $v \longmapsto f(u, \ldots, u, v, u, \ldots, u)$, de la façon suivante :

$$\begin{aligned} DF(u)\,\vec{h} &= \sum_{i=1}^{k} D_i f(u, \ldots, u)\,\vec{h} \\ &= k\Big(f(u, \ldots, u, \mathcal{O} + \vec{h}) - f(u, \ldots, u, \mathcal{O})\Big) \quad \forall \mathcal{O} \in E. \end{aligned}$$

On notera

$$f^{[1]}(u_1, \ldots, u_{k-1}; \vec{h}) := f(u_1, \ldots, u_{k-1}, \mathcal{O} + \vec{h}) - f(u_1, \ldots, u_{k-1}, \mathcal{O})$$

Il est facile de voir que l'application $f^{[1]}$, à valeurs dans $\vec{Q}$, est $(k-1)$-affine et symétrique par rapport aux $k-1$ premiers arguments et linéaire par rapport au dernier argument. Donc $DF(u)\,\vec{h}$ est une fonction polynômiale de degré $k-1$ et on notera :

$$DF(u)\,\vec{h} = k\, f^{[1]}(u, \ldots, u; \vec{h}).$$

De la même façon, la dérivée seconde au point u évaluée en un vecteur $\vec{l}$ est donnée par

$$\begin{aligned} D(DF(\cdot)\,\vec{h})(u)\,\vec{l} &= (k-1)(kf^{[1]}(u, \ldots, u, \mathcal{O}' + \vec{l}; \vec{h}) \\ &\qquad - kf^{[1]}(u, \ldots, u, \mathcal{O}'; \vec{h})) \qquad \forall \mathcal{O}' \in E \\ &=: k(k-1) f^{[2]}(u, \ldots, u; \vec{l}, \vec{h}), \end{aligned}$$

où $f^{[2]}$ est une fonction $(k-2)$-affine et symétrique par rapport aux $(k-2)$ premiers arguments et bilinéaire symétrique par rapport aux deux derniers arguments. Plus généralement, pour le calcul de la dérivée r-ième en u, on a seulement besoin de connaître la fonction :

$$(v_1, \ldots, v_r) \longmapsto f(u^{k-r}, v_1, \ldots, v_r).$$

On peut voir que la dérivée k-ième sera une constante (par rapport à u) et donc, la dérivée $(k+1)$-ième sera nulle. Il est clair que, si on exprime ces fonctions par rapport à un système de coordonnées, on se trouve face à des fonctions de plusieurs variables réelles dont la dérivée $(k+1)$-ième est nulle. Il s'agit forcément de polynômes habituels; leur développement de Taylor ne contient que des puissances inférieures ou égales à k.

En particulier, une fonction polynômiale $F\ :\ \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}$ est une combinaison linéaire de termes de la forme

$$u^\alpha := u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \cdots u_s^{\alpha_s}, \quad u = (u_1, \ldots, u_s) \in \mathbb{R}^s,$$

avec $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, s$, $\alpha_1 + \cdots + \alpha_s \leq k$. Les termes u^α constituent la base des monômes, et on peut écrire l'expression suivante pour F :

$$F(u) = \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha \, u^\alpha.$$

Une conséquence intéressante de la formule de polarité (1.16) est la possibilité d'écrire F aussi sous la forme

$$F(u) = \sum_i \lambda_i \, (< \omega_i \, , \, u > + b_i)^k, \tag{1.19}$$

c'est-à-dire, comme combinaison linéaire de puissances k-ièmes de fonctions affines $\varphi_i(u)$, avec $\varphi_i(u) = < \omega_i \, , \, u > + b_i$. Ici, la notation $< \cdot \, , \, \cdot >$ indique le produit scalaire habituel de $\mathbb{R}^s$. Voyons pourquoi la représentation (1.19) est possible.

Soit f la fonction k-affine de $\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x_1, \ldots, x_k) = x_1 x_2 \cdots x_k$. Elle peut s'écrire, suivant le lemme 1.15, comme

$$f(x_1, \ldots, x_k) = \frac{1}{k!} \sum_{S \subseteq \{1, \ldots, k\}} (-1)^{k-\nu} \, (\sum_{i \in S} x_i)^k.$$

Pour $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$, avec $|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_s \leq k$, on peut prendre

$$x = (\underbrace{u_1, \ldots, u_1}_{\alpha_1 \text{ fois}}, \ldots, \underbrace{u_s, \ldots, u_s}_{\alpha_s \text{ fois}}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k-|\alpha| \text{ fois}}) \in \mathbb{R}^k,$$

avec lequel on obtient $f(x) = u^\alpha$. Par ailleurs, les termes à la puissance k-ième qui apparaissent à l'intérieur de la somme sont de la forme

$$(\sum_{i \in S} x_i)^k = (< \omega_S \, , \, u > + b_S)^k,$$

où $(\omega_S)_i$, composante i-ème de ω_S, est le nombre de $j \in S$ tel que x_j est égal à u_i et b_S est le nombre de composantes x_j égales à 1.

1.3 Evaluation de Polynômes

Pour mémoire, nous rappelons d'abord l'algorithme de De Casteljau pour l'évaluation de courbes et surfaces polynômiales, suivant les travaux de L. Ramshaw ([3], [4]).

Définition 1.20 *Un s-simplexe est un sous-ensemble $\Delta \subseteq E$, qui peut s'écrire comme $\Delta = [X]$ avec $X = \{x_0, \ldots, x_s\}$ affinement indépendant.*

Pour $s = 1$, 2 et 3 on parle de segment, triangle et tétraèdre respectivement.

Une fonction affine sur $\mathrm{Aff}(X)$, est complètement déterminée par ses valeurs sur X. Par exemple, en utilisant les coordonnées barycentriques de $u \in \mathrm{Aff}(X)$:

$$u = \sum_{i=0}^{s} \lambda_i(u)\, x_i \Rightarrow \varphi(u) = \sum_{i=0}^{s} \lambda_i(u)\, \varphi(x_i).$$

On peut procéder de façon similaire pour une fonction polynômiale. En principe, si $F(u) = f(u^k)$, il suffit de connaître $f(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k})$ pour toute combinaison de k points non nécessairement distincts de X.

Plus précisément, tout k-uplet formé d'éléments non nécessairement distincts de X, peut se mettre sous la forme

$$(\underbrace{x_0, \ldots, x_0}_{\beta_0}, \underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{\beta_1}, \ldots, \underbrace{x_s, \ldots, x_s}_{\beta_s}),$$

où $\beta_0 + \cdots + \beta_s = k$.

Puisque f est symétrique, l'ordre de ses arguments n'est pas important. Pour $\beta = (\beta_0, \ldots, \beta_s) \in \mathbb{Z}_+^{s+1}$, on notera

$$\begin{aligned} X_\beta &:= (\underbrace{x_0, \ldots, x_0}_{\beta_0}, \ldots, \underbrace{x_s, \ldots, x_s}_{\beta_s}) \\ &= ({x_0}^{\beta_0} \ldots {x_s}^{\beta_s}) \end{aligned}$$

où l'on suppose que l'ensemble X est ordonné.

Un point $u \in \mathrm{Aff}(X)$ peut s'écrire sous la forme

$$u = \sum_{i=0}^{s} \lambda_i(u)\, x_i,$$

où les coefficients $\lambda_i(u)$ sont les coordonnées barycentriques de u par rapport à X.

Pour $0 \le \nu \le k$ et β vérifiant $|\beta| = k - \nu$, $X_\beta u^\nu$ représente un k-uplet de points de $\mathrm{Aff}(X)$. On peut donc définir les quantités

$$C_\beta^\nu(u) = f(X_\beta u^\nu). \tag{1.21}$$

On note immédiatement que :

i) $C_\beta^0(u) = f(X_\beta)$ avec $|\beta| = k$.

ii) $C_{(0\ldots0)}^k(u) = f(u^k) = F(u)$.

Grâce à la k-affinité de f, on peut établir des relations de récurrence qui permettent de calculer $C_\beta^{\nu+1}(u)$ à partir des $C_{\beta+e_i}^\nu(u)$ où e_i désigne le i-ème multi-indice de base. Ceci constitue le principe de l'algorithme de De Casteljau qui consiste à calculer $F(u)$ à partir des points $f(X_\beta)$, $|\beta| = k$, appelés points de Bézier ou pôles de $F(\Delta)$. Dans ce cas, la variété définie par $F : \Delta \longrightarrow Q$ est appelée variété de Bézier.

Soit ν tel que $0 \leq \nu \leq k-1$, pour $u = \sum_{i=0}^{s} \lambda_i(u)\, x_i$, on a

$$\begin{aligned} C_\beta^{\nu+1}(u) &= f(X_\beta u^{\nu+1}) \\ &= f(X_\beta u^\nu (\sum_{i=0}^{s} \lambda_i(u)\, x_i)) \end{aligned}$$

et grâce à la k-affinité de f

$$\begin{aligned} C_\beta^{\nu+1}(u) &= \sum_{i=0}^{s} \lambda_i(u) f(X_\beta x_i u^\nu) \\ &= \sum_{i=0}^{s} \lambda_i(u) f(X_{\beta+e_i} u^\nu) \\ &= \sum_{i=0}^{s} \lambda_i(u) C_{\beta+e_i}^{\nu}(u). \end{aligned}$$

Pour $u \in \Delta$, les points $C_\beta^{\nu+1}(u)$ s'écrivent comme combinaison convexe des points $C_{\beta+e_i}^{\nu}(u)$. De proche en proche, on obtient donc

$$F(\Delta) \subseteq \mathrm{co}\{f(X_\beta) \mid |\beta| = k\}.$$

De plus, pour $\beta = (0, \ldots, k, \ldots, 0)$ (où k occupe la i-ème position), $f(X_\beta) = f({x_i}^k) = F(x_i)$. Donc les images des sommets de Δ sont des pôles. Enfin, pour $\vec{v} = u - x_i$, en notant $\beta = (0, \ldots, k-1, \ldots, 0)$:

$$\begin{aligned} DF(x_i)(\vec{v}) &= k[f(x_i, \ldots, x_i, u) - f(x_i, \ldots, x_i, x_i)] \\ &= k[f(X_\beta\, u) - f(X_{\beta+e_i})] \\ &= k \sum_{j=0}^{s} \lambda_j(u)\, [f(X_{\beta+e_j}) - f(X_{\beta+e_i})]. \end{aligned}$$

On va présenter maintenant un schéma plus général proposé par H.P. Seidel ([6], [7] et [8]) et qui sera appliqué à l'étude des splines simpliciales dans le chapitre 4.

On supposera que l'espace affine E est de dimension s et qu'on associe à chaque sommet de Δ un nuage de k points additionnels. Si on choisit de répéter chaque sommet k fois, on retrouve les variétés de Bézier. On supposera alors l'existence, pour chaque $i = 0, \ldots, s$, de k points

$$x_{i,1}, x_{i,2}, \ldots, x_{i,k}$$

associés au sommet x_i, sommet qu'on notera par homogénéité $x_{i,0}$. Par analogie avec le cas précédent on notera ici, pour $\beta = (\beta_0, \ldots, \beta_s)$

$$X_\beta := (x_{0,0}, \ldots, x_{0,\beta_0 - 1}, \ldots, x_{s,0}, \ldots, x_{s,\beta_s - 1}).$$

A chaque β on associera le s-simplexe

$$\Delta_\beta = [x_{0,\beta_0}, \ldots, x_{s,\beta_s}]$$

et les coordonnées barycentriques de u par rapport à Δ_β seront notées $\lambda_{\beta,i}(u)$. On a donc

$$u = \sum_{i=0}^{s} \lambda_{\beta,i}(u) x_{i,\beta_i}.$$

Il faut supposer ici que les s-simplexes Δ_β sont non dégénérés, c'est-à-dire que $\{x_{0,\beta_0}, \ldots, x_{s,\beta_s}\}$ est affinement indépendant, ce qui équivaut à la condition $\mathit{int}\, \Delta_\beta \neq \emptyset$.

L'extension de l'algorithme de De Casteljau devient l'algorithme de Seidel-De Boor-De Casteljau suivant (en utilisant, formellement, les mêmes notations) :

$$\begin{aligned}
C^0_\beta(u) &= f(X_\beta), \quad \text{pour} \quad |\beta| = k, \\
C^{\nu+1}_\beta(u) &= \sum_{j=0}^{s} \lambda_{\beta,j}(u)\, C^\nu_{\beta+e_j}(u) \;\; \text{pour } \nu = 0, \ldots, k-1 \\
&\qquad \text{et } |\beta| = k - \nu - 1, \\
C^k_0(u) &= f(u^k) = F(u)
\end{aligned} \tag{1.22}$$

Les points $f(X_\beta)$, pour $|\beta| = k$, seront appelés simplement pôles de F. La seule différence pratique avec l'algorithme de De Casteljau provient de l'emploi de simplexes différents à chaque itération pour le calcul des coordonnées barycentriques. On a besoin alors de supposer que chaque simplexe utilisé n'est pas dégénéré. Autrement dit :

$$\mathit{int}\, \Delta_\beta \neq \emptyset \qquad |\beta| \leq k - 1.$$

Une condition suffisante (mais nullement nécessaire) pour assurer ceci est

$$\Omega := \mathit{int}\Big(\bigcap_{|\beta| \leq k-1} \Delta_\beta \Big) \neq \emptyset. \tag{1.23}$$

Pour $u \in \Omega$, les coordonnées barycentriques par rapport à tous les simplexes Δ_β seront positives, et dans ce cas

$$F(u) \in \mathrm{co}\{F(X_\beta) \mid \quad |\beta| = k\}.$$

En général, on peut assurer seulement que pour $u \in E$

$$F(u) \in \mathrm{Aff}\, \{F(X_\beta) \mid \quad |\beta| = k\}.$$

Remarque : Les coordonnées barycentriques par rapport aux simplexes Δ_β avec $|\beta| = k$ ne sont jamais utilisées dans (1.22). On remarque même que les points $x_{i,k}$ n'interviennent dans aucun calcul ni dans aucun X_β, $|\beta| = k$. On les mentionne ici par cohérence avec la suite, où on introduira les splines simpliciales par rapport aux mêmes ensembles.

Soit $\mathcal{P}_k(E,Q)$ l'espace des polynômes de degré k définis sur E et à valeurs dans Q. Cet espace sera considéré comme espace affine à partir de la structure affine de Q. De cette façon, l'espace vectoriel associé sera $\mathcal{P}_k(E,\vec{Q})$, et la translation d'un point par un vecteur est donnée par :

$$F + \vec{G} : u \longmapsto F(u) + \vec{G}(u)$$

Pour $Q = \mathbb{R}$ on notera simplement $\mathcal{P}_k(E)$ qui peut être considéré lui-même comme espace vectoriel. Définissons pour chaque β, $|\beta| = k$, les fonctionnelles linéaires suivantes :

$$\mathcal{L}_\beta \;:\; F \in \mathcal{P}_k(E) \longmapsto f(X_\beta).$$

Théorème 1.24 *Les fonctionnelles $\mathcal{L}_\beta$, $|\beta| = k$, constituent une base du dual $\mathcal{P}_k(E)'$ de $\mathcal{P}_k(E)$.*

Démonstration :
D'après l'algorithme de Seidel-De Boor-De Casteljau,

$$\mathcal{L}_\beta(F) = 0 \quad \forall\beta, |\beta| = k \quad \Rightarrow \quad F \equiv 0.$$

Donc $\{\mathcal{L}_\beta\}_\beta$ est une famille totale du dual de $\mathcal{P}_k(E)$. Cela signifie qu'elle contient nécessairement une base du dual.

Mais $dim\,\mathcal{P}_k(E)' = dim\,\mathcal{P}_k(E) = \binom{s+k}{k}$, et comme $\#\{\beta \mid |\beta| = k\} = (s+k)!/s!k! = \binom{s+k}{k}$, $\{\mathcal{L}_\beta \mid |\beta| = k\}$ est une base du dual. ■

Notons B_β, $|\beta| = k$, la base duale dans $\mathcal{P}_k(E)$ des fonctionnelles $\mathcal{L}_\beta$. Ces polynômes seront appelés les B-poids par rapport à X. Ils sont définis par

$$\mathcal{L}_\gamma(B_\beta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \gamma = \beta \\ 0 & \text{si } \gamma \neq \beta \end{cases} \tag{1.25}$$

pour tout β ($|\beta| = k$) et tout γ ($|\gamma| = k$).

Pour un polynôme $F \in \mathcal{P}_k(E)$ quelconque, on a la représentation :

$$\begin{aligned} F(u) &\equiv \sum_{|\beta|=k} \mathcal{L}_\beta(F)\, B_\beta(u) \\ &= \sum_{|\beta|=k} f(X_\beta)\, B_\beta(u). \end{aligned} \tag{1.26}$$

Un cas particulier intéressant est celui du graphe d'une fonction polynômiale de degré k, $F : E \longrightarrow \mathbb{R}$, c'est-à-dire, de la variété définie par

$$u \in E \longmapsto (u, F(u)) \in E \times \mathbb{R}.$$

La floraison (k-affine et symétrique) d'une fonction affine $\phi : E \longrightarrow Q$ est donnée par

$$\varphi(u_1, \ldots, u_k) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{k} \phi(u_j).$$

En particulier, la floraison de l'identité de E sera

$$(u_1, \ldots, u_k) \longmapsto \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{k} u_j.$$

Donc, si f est la floraison de F, les pôles de la variété "graphe de F" sont :

$$P_\beta := (x(\beta), f(X_\beta)), \qquad |\beta| = k, \tag{1.27}$$

avec $x(\beta) = \sum_{i=0}^{s} \sum_{j<\beta_i} \frac{1}{k} x_{i,j}$. Les points $x(\beta) \in E$ sont appellés abscisses de Greville.

On vient de faire usage du résultat général suivant relatif à la floraison d'un polynôme à valeurs dans un produit cartésien. Supposons que l'espace affine Q soit de la forme

$$Q = Q_1 \times Q_2 \times \cdots \times Q_d,$$

et que F soit une fonction polynômiale

$$\begin{aligned} F \ : E &\longrightarrow Q_1 \times Q_2 \times \cdots \times Q_d \\ u &\longmapsto F(u) = (F_1(u), \ldots, F_d(u)). \end{aligned}$$

Si l'on note f la floraison de F et f_j celle de la composante F_j, on a le résultat suivant qui se démontre facilement :

Théorème 1.28 $\quad f = (f_1, \ldots, f_d)$.

Regardons en détail le cas $Q = \mathbb{R}^d$. La formule (1.26) peut s'appliquer à chaque composante de F

$$F_i(u) = \sum_{|\beta|=k} f_i(X_\beta)\, B_\beta(u),$$

donc

$$\begin{aligned} F(u) &= (F_1(u), \ldots, F_d(u)) \\ &= \sum_{|\beta|=k} (f_1(X_\beta)\, B_\beta(u), , \ldots, f_d(X_\beta)\, B_\beta(u)) \\ &= \sum_{|\beta|=k} f(X_\beta)\, B_\beta(u), \end{aligned} \tag{1.29}$$

donc (1.26) est valable pour $F \in \mathcal{P}_k(E, \mathbb{R}^d)$. D'un autre côté, pour $d = 1$ et $F \equiv 1$ il est clair que $f(X_\beta) = 1$, pour $|\beta| = k$, d'où :

$$\sum_{|\beta|=k} B_\beta(u) \equiv 1 \qquad \forall u \in E.$$

Les B-poids forment une partition de l'unité. Une conséquence fondamentale de ceci est :

Théorème 1.30 *Soit $\phi \; : \; Q \longrightarrow \tilde{Q}$ une transformation affine, alors*

$$\phi(F(u)) = \sum_{|\beta|=k} B_\beta(u)\, \phi(f(X_\beta))$$

Démonstration :

Vérifions d'abord que (1.29) est encore valable lorsque Q est un espace affine quelconque (de dimension finie). En effet, un tel Q est isomorphe à $\mathbb{R}^d$ (voir Définition 1.6) avec $d = dim(\vec{Q})$. Soit donc J un isomorphisme de Q dans $\mathbb{R}^d$ (bijection affine). On a $J \circ F \in \mathcal{P}_k(E, \mathbb{R}^d)$ et sa floraison est $J \circ f$. Alors, par (1.29)

$$J \circ F(u) = \sum_{|\beta|=k} B_\beta(u)\, J \circ f(X_\beta)$$

et en appliquant l'inverse de J

$$\begin{aligned} F(u) &= J^{-1}\Big(\sum_{|\beta|=k} B_\beta(u)\, J \circ f(X_\beta)\Big) \\ &= \sum_{|\beta|=k} B_\beta(u) J^{-1}\big(J \circ f(X_\beta)\big) \\ &= \sum_{|\beta|=k} B_\beta(u)\, f(X_\beta). \end{aligned}$$

Finalement, il suffit d'appliquer ϕ à cette égalité. ∎

Remarque : On peut dire que l'information relative au domaine (le simplexe X avec ses nuages de points) est résumée dans les B-poids B_β et que l'information relative à la surface représentée est résumée dans ses pôles $f(X_\beta)$. Si la surface subit une transformation affine (translation, rotation, homothetie, ...) seuls les pôles devront être modifiés.

Définition 1.31 *On appellera B-patch une variété définie par $F : \Delta \longrightarrow Q$ où F est une fonction polynômiale représentée sur la base des B-poids. Les pôles jouent le rôle de coefficients par rapport à cette base.*

L'algorithme de Seidel-De Boor-De Casteljau permet d'évaluer le polynôme F (aussi bien que sa floraison) à partir de ses pôles sans avoir besoin de calculer chaque $B_\beta(u)$.

Néanmoins, si on a besoin d'évaluer les B-poids, il y a une façon récursive de le faire. Pour cela, on a le résultat clé suivant :

Théorème 1.32

$$F(u) = \sum_{|\beta|=k-\nu} C^\nu_\beta(u)\, B_\beta(u) \qquad \nu = 0, 1, \ldots, k.$$

Démonstration : Pour $\nu \in \{0, \ldots, k\}$ et $w \in E$ fixés,

$$F_{w^\nu}(u) := f(u^{k-\nu} w^\nu)$$

définit un polynôme de degré $k-\nu$ dont les pôles sont justement les $C^\nu_\beta(w)$, $|\beta| = k-\nu$. On obtient donc

$$F_{w^\nu}(u) = \sum_{|\beta|=k-\nu} C^\nu_\beta(w) B_\beta(u)$$

et en particulier, pour $w = u$, on obtient le résultat. ■

Pour $\nu = 0$, on retrouve la relation (1.29)

$$\begin{aligned} F(u) &= \sum_{|\beta|=k} C^0_\beta(u)\, B_\beta(u) \\ &= \sum_{|\beta|=k} f(X_\beta)\, B_\beta(u). \end{aligned}$$

Théorème 1.33 *Les B-poids B_β vérifient les relations de récurrence suivantes :*

i) $B_{(0,\ldots,0)}(u) \equiv 1$.

ii) Pour β tel que $|\beta| \geq 1$:

$$B_\beta(u) = \sum_{j=0}^{s} \lambda_{\beta-e_j,j}(u)\, B_{\beta-e_j}(u),$$

où $B_{\beta-e_j}(u) = 0$ *si* $\beta_j = 0$.

Démonstration : Pour $\nu = 1$, la formule du théorème 1.32 devient

$$\begin{aligned} F(u) &= \sum_{|\beta|=k-1} C^1_\beta(u)\, B_\beta(u) \\ &= \sum_{|\beta|=k-1} \Big[\sum_{j=0}^{s} \lambda_{\beta,j}(u)\, C^0_{\beta+e_j}(u)\Big]\, B_\beta(u) \\ &= \sum_{j=0}^{s} \sum_{|\beta|=k-1} \lambda_{\beta,j}(u)\, f(X_{\beta+e_j})\, B_\beta(u). \end{aligned}$$

L'application $\beta \longmapsto \beta + e_j$ établit une bijection entre $\{\beta \mid |\beta| = k-1\}$ et $\{\beta \mid |\beta| = k, \beta_j \neq 0\}$. On peut faire le changement d'indices suivant dans la somme intérieure

$$F(u) = \sum_{j=0}^{s} \sum_{\substack{|\beta|=k \\ \beta_j\neq 0}} \lambda_{\beta-e_j,j}(u)\, f(X_\beta)\, B_{\beta-e_j}(u).$$

On convient de poser $B_\beta \equiv 0$ lorsque l'une des composantes β_j de β est négative. En particulier, $B_{\beta-e_j}(u) \equiv 0$ si $\beta_j = 0$. On a alors

$$\begin{aligned} F(u) &= \sum_{j=0}^{s} \sum_{|\beta|=k} \lambda_{\beta-e_j,j}(u)\, f(X_\beta)\, B_{\beta-e_j}(u) \\ &= \sum_{|\beta|=k} f(X_\beta)\, \Big[\sum_{j=0}^{s} \lambda_{\beta-e_j,j}(u)\, B_{\beta-e_j}(u)\Big]. \end{aligned}$$

En comparant à 1.29, on obtient :

$$B_\beta(u) = \sum_{j=0}^{s} \lambda_{\beta-e_j,j}(u)\, B_{\beta-e_j}(u).$$

L'algorithme récursif pour l'évaluation des B_β est ainsi établi. ∎

Pour $|\beta| = k$, on observe que $B_\beta(u)$ s'écrit comme une somme de termes, produits de k coordonnées barycentriques. Dans le cas des nuages confondus avec chaque sommet, l'expression explicite des B_β est :

$$B_\beta(u) = \binom{|\beta|}{\beta} \lambda_0^{\beta_0}(u) \cdots \lambda_s^{\beta_s}(u),$$

avec la notation

$$\binom{|\beta|}{\beta} := \frac{|\beta|}{\beta_1! \cdots \beta_s!}.$$

On retrouve de cette façon les polynômes de Bernstein à s variables.

Figure 1.34 : Exemple de B-patch cubique.

1.4 L'insertion de nœuds : Subdivision

Les méthodes de subdivision sont très populaires dans le domaine du CAGD (Computer Aided Geometric Design) et les floraisons permettent un traitement simple de celles-ci. Dans cette section on va en présenter un exemple.

Considérons un ensemble $X := \{x_1, x_2, x_3\}$ affinement indépendant dans E supposé de dimension 2, et une fonction affine

$$\Phi \ : \ \Delta = [x_0, x_1, x_2] \longrightarrow Q.$$

Sur le triangle Δ pour $k > 0$, on peut construire un réseau de points $x(\beta)$, qu'on appellera k-réseau naturel de Δ, en associant à chaque multi-indice β, $|\beta| = k$, le point

$$x(\beta) := \frac{\beta_0}{|\beta|}\, x_0 + \frac{\beta_1}{|\beta|}\, x_1 + \frac{\beta_2}{|\beta|}\, x_2.$$

On suppose ici que les nœuds additionnels associés à chaque sommet sont confondus avec celui-ci.

Théorème 1.35 *Si on note φ la floraison k-affine et symétrique de Φ, on a la relation suivante entre les pôles de Φ et le k-réseau naturel de Δ :*

$$\Phi(x(\beta)) = \varphi(x_\beta).$$

Démonstration : Il suffit de rappeler que la floraison k-affine et symétrique de Φ est donnée par

$$\varphi(u_1, \ldots, u_k) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k}\, \Phi(u_i). \qquad \blacksquare$$

Pour une fonction affine, les pôles sont les images du k-réseau associé au triangle de départ. Dans ce sens, les pôles fournissent une approximation de la surface $\Phi(\Delta)$.

Considérons maintenant une fonction polynômiale de degré k

$$F \ : \ \Delta = [x_0, x_1, x_2] \longrightarrow Q.$$

Si Δ est suffisamment petit, pour $a \in \Delta$, la fonction affine

$$\Phi(u) = F(a) + DF(a)\,(u - a)$$

sera une bonne approximation de F dans un voisinage de a, et les pôles de F fourniront donc une approximation de la surface $F(\Delta)$.

Il semble alors intéressant de subdiviserer le triangle d'origine en triangles aussi petits que nécessaire et de calculer les pôles de F par rapport à chacun de ces sous-triangles.

Si on choisit $a \in \Delta$, le triangle Δ peut être décomposé en trois triangles :

$$\Delta_0 = [a, x_1, x_2], \quad \Delta_1 = [x_0, a, x_2], \text{ et } \Delta_2 = [x_0, x_1, a].$$

On voudrait obtenir les pôles de F par rapport à chacun de ces trois triangles à partir de ceux par rapport à Δ. Plus précisément, pour Δ_0, comment, à partir des points $f(X_\beta)$, $|\beta| = k$, calculer les points $f(a^{\beta_0}\ {x_1}^{\beta_1}\ {x_2}^{\beta_2})$, $|\beta| = k$? On remarque que

$$C^{\beta_0}_{(0\beta_1\beta_2)}(a) = f(a^{\beta_0}{x_1}^{\beta_1}{x_2}^{\beta_2}).$$

Alors, les pôles de F par rapport à chaque triangle Δ_i s'obtiennent comme sous-produits de l'évaluation de $F(a)$ selon l'algorithme de De Casteljau.

On voudrait que la répétition de ce procédé produise des sous-triangles aussi petits que possible. Malheureusement, ce procédé ne modifie pas les côtés du triangle original et la taille des triangles ne peut pas tendre vers zéro. Il y a plusieurs façons de corriger ceci. Une méthode non traditionnelle de procéder est développée ci-dessous.

Choisissons sur Δ le côté le plus long et prenons a au milieu de ce côté en ajoutant à la triangulation le segment joignant a au sommet opposé.

On obtient ainsi une triangulation de Δ sur laquelle on procède itérativement de la façon suivante :

i) Choisir dans la triangulation le côté le plus long. S'il n'est pas unique, en prendre un quelconque parmi les plus longs.

ii) Calculer le milieu de ce côté et ajouter ce nouveau sommet à la triangulation.

iii) Si ce côté se trouve sur le bord du triangle Δ original, décomposer le triangle qui possède ce côté en deux triangles.

Si le côté est à l'intérieur de Δ, décomposer les deux triangles qui ont ce côté en commun en deux triangles chacun.

Il est clair que la longueur des côtés des triangulations ainsi générées tend vers zéro.

On va généraliser ceci au cas $dim\, E = s$, et où à chaque sommet de Δ est associé un nuage de nœuds additionnels. La version multiaffine de l'algorithme de Seidel-De Boor-De Casteljau sera nécessaire.

Soit $u_0 \in E$ et $u_1, \dots, u_k \in E$ un nuage de nœuds associé. On notera

$$c^\nu_\beta(u_0, \dots, u_{\nu-1}) = f(X_\beta, u_0, \dots, u_{\nu-1}) \qquad |\beta| = k - \nu$$

Un algorithme récursif pour calculer ces quantités est le suivant :

$$c^0_\beta() = f(X_\beta) \qquad \text{pour } |\beta| = k,$$

$$c^{\nu+1}_\beta(u_0, \dots, u_\nu) = \sum_{j=0}^{s} \lambda_{\beta,j}(u_\nu)\, c^\nu_{\beta+e_j}(u_0, \dots, u_{\nu-1}) \qquad \text{avec } |\beta| = k - \nu - 1.$$

On observe que $c^\nu_\beta(u^\nu) = C^\nu_\beta(u)$, donc $c^\nu_\beta(\cdot)$ est la floraison de $C^\nu_\beta(\cdot)$

Si on veut introduire u_0 comme nouveau nœud, le simplexe Δ est d'abord décomposé en $s + 1$ simplexes. Le i-ième aura pour sommets

$$X^i = \{x_0, \dots, x_{i-1}, u_0, x_{i+1}, \dots, x_s\}$$

(on remplace le i-ième sommet de Δ par u_0). Les pôles de F par rapport à chacun de ces simplexes seront

$$f(X^i_\beta) = f(X_{\tilde{\beta}^i}, u_0, \dots, u_{\beta_i - 1}),$$

où $\tilde{\beta}^i$ est égal à β sauf la i-ième composante qui est nulle et $u_1, \dots, u_k$ sont les k nœuds additionnels associés a u_0.

La version multiaffine de l'algorithme de Seidel-De Boor-De Casteljau produira de façon directe ces nouveaux pôles.

Comme avant, on peut choisir u_0 sur la plus grande face de Δ. Dans ce cas, le simplexe $[X^i]$, correspondant au sommet x_i, sommet opposé à la face choisie, ne sera pas considéré. On obtient de cette façon des triangulations de plus en plus fines, mais formées cette fois de simplexes au lieu de triangles.

Mais les nuages ne diminuent pas de taille. Il faut prévoir cette fois un procédé d'échange de nœuds, à l'intérieur de chaque nuage. Supposons qu'on remplace $x_{0,0}, \ldots, x_{0,k}$ par $x_{0,0}, \ldots,\ x_{0,j-1}, u, x_{0,j}\ \ldots, x_{0,k-1}$. Autrement dit, u est ajouté entre $x_{0,j-1}$ et $x_{0,j}$, et $x_{0,k}$ est éliminé du nuage. De cette façon, on aura toujours k points additionnels pour chaque nuage.

Quels seront les pôles par rapport à ces nouveaux nœuds? Notons $\tilde{X}$ le simplexe avec le nœud échangé.

Les pôles de F par rapport à $\tilde{X}$ sont

$$f(\tilde{X}_\beta), \qquad |\beta| = k.$$

Si $\beta_0 \leq j$, alors $\tilde{X}_\beta \equiv X_\beta$ et les pôles sont dans ce cas les mêmes.

Supposons que $\beta_0 > j$. Dans ce cas

$$\begin{aligned} f(\tilde{X}_\beta) = f(&x_{0,0}, \ldots, x_{0,j-1}, u, x_{0,j}, \ldots, x_{0,\beta_0-2}, \\ &x_{1,0}, \ldots, x_{1,\beta_1-1}, \ldots, x_{s,0}, \ldots, x_{s,\beta_1-1}). \end{aligned}$$

Mais si on représente u sur $\Delta_{\tilde{\beta}}$, avec $\tilde{\beta} = (\beta_0 - 1, \beta_1, \ldots, \beta_s) = \beta - e_0$

$$u = \sum_{l=0}^{s} \lambda_{\tilde{\beta},l}(u)\, x_{l,\tilde{\beta}_l}.$$

Ainsi, pour le pôle on aura :

$$\begin{aligned} f(\tilde{X}_\beta) &= f(X_{\beta-e_0}, \sum_{l=0}^{s} \lambda_{\tilde{\beta},l}(u)\, x_{l,\tilde{\beta}_l}) \\ &= \sum_{l=0}^{s} \lambda_{\tilde{\beta},l}(u)\, f(X_{\beta-e_0}, x_{l,\tilde{\beta}_l}). \end{aligned}$$

En principe, on peut passer de cette façon de la représentation B-patch à la représentation de Bézier, et inversement, en échangeant les points de chaque nuage.

Mais il y a plus simple : si on veut remplacer $x_{0,0}, \ldots, x_{0,\beta_0}$ par $x_0, \ldots, x_0$ (répété k fois), on applique l'algorithme de Seidel-De Boor-De Casteljau pour le calcul de $F(x_0)$, et on obtient au passage les coefficients

$$C^\nu_\beta(x_0) = f(X_\beta {x_0}^\nu).$$

Les nouveaux pôles correspondent aux $\beta = (0, \beta_1, \ldots, \beta_s)$.

1.5 Raccordement de polynômes

La caractérisation du contact d'ordre r devient algébrique avec l'utilisation des floraisons. Le premier théorème de caractérisation est dû à L. Ramshaw ([3]) et le deuxième est une généralisation d'un résultat de H.P. Seidel ([8]).

Définition 1.36 *Deux polynômes F et G ont un contact d'ordre r en un point $u \in E$ si les dérivées de F et de G en u coïncident jusqu'à l'ordre r.*

Ils auront un contact d'ordre r le long d'une variété affine $H \subseteq E$ s'ils ont un contact d'ordre r en chaque point $u \in H$.

On supposera dans la suite que le degré des deux polynômes est le même, soit k. Ceci n'entraîne pas une perte de généralité puisqu'on peut toujours considérer un polynôme de degré $p < k$ comme un cas particulier de polynôme de degré k. Néanmoins, la floraison n'est pas la même car elle dépend du degré considéré.

Si F est de degré p, sa floraison f est une application p-affine, symétrique qui vérifie

$$F(u) = f(u^p).$$

Comme F est aussi de degré $p+1$, il doit exister une application $(p+1)$-affine et symétrique, $\tilde{f}$, qui vérifie

$$F(u) = \tilde{f}(u^{p+1}).$$

En effet, il suffit de prendre

$$\tilde{f}(u_1, \ldots, u_{p+1}) = \sum_{j=1}^{p+1} \frac{1}{p+1} f(u_1, \ldots, u_{j-1}, u_{j+1}, \ldots, u_{p+1}).$$

Cette expression résume l'essentiel de l'élévation du degré, c'est-à-dire, représenter un polynôme de degré p comme cas particulier de polynôme de degré plus élevé. La fonction polynômiale n'est pas modifiée, mais sa floraison est différente, donc les pôles sont différents. On peut exprimer les nouveaux pôles à partir des anciens.

Dans le cas d'une surface de Bézier (les nuages de nœuds additionnels sont confondus avec les sommets du triangle de base), l'expression pour les nouveaux pôles est simple.

Soit β, $|\beta| = p+1$, alors

$$X_\beta = ({x_0}^{\beta_0} {x_1}^{\beta_1} {x_2}^{\beta_2})$$

et

$$\tilde{f}(X_\beta) = \sum_{j=1}^{p+1} \frac{1}{p+1} f(X_{\tilde{\beta}^j}), \tag{1.37}$$

où $X_{\tilde{\beta}^j}$ représente le p-uplet obtenu à partir de X_β en enlevant le j-ième élément. Pour $1 \leq j \leq \beta_0$ cet élément est toujours x_0. Pour $\beta_0 + 1 \leq j \leq \beta_0 + \beta_1$ l'élément est toujours x_1. Et pour $\beta_0 + \beta_1 + 1 \leq j \leq \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 = p+1$, il est toujours égal à x_2. Donc l'expression (1.37) devient simplement

$$\tilde{f}(X_\beta) = \frac{\beta_0}{|\beta|} f(X_{\beta - e_0}) + \frac{\beta_1}{|\beta|} f(X_{\beta - e_1}) + \frac{\beta_2}{|\beta|} f(X_{\beta - e_2}) \qquad \forall \beta, \quad |\beta| = p+1.$$

Dans le cas général, le calcul n'est pas aussi direct. Ainsi, pour $|\beta| = p+1$, le p-uplet $X_{\tilde{\beta}j}$ obtenu en enlevant le j-ième point de X_β n'est pas en général de la forme X_γ avec un $|\gamma| = p$. Donc, d'après (1.37) il faut calculer un barycentre de $p+1$ valeurs de floraison dont chacune peut être calculée à l'aide de l'algorithme de Seidel-De Boor-De Casteljau.

Le théorème fondamental pour l'étude des raccordements C^r de fonctions polynômiales est le suivant :

Théorème 1.38 *Les conditions suivantes sont équivalentes :*
i) F *et* G *ont un contact d'ordre* r *le long de* H*,*
ii) $f(u^{k-r}v_1 \dots v_r) = g(u^{k-r}v_1 \dots v_r) \quad \forall u \in H, \quad \forall v_1, \dots, v_r \in E,$
iii) $f(u_1 \dots u_{k-r}v_1 \dots v_r) = g(u_1 \dots u_{k-r}v_1 \dots v_r) \quad \forall u_1, \dots, u_{k-r} \in H,$
$\forall v_1, \dots, v_r \in E,$
où f *et* g *sont les floraisons de* F *et* G *respectivement.*

Démonstration :
i) $\Rightarrow$ ii)
On procède par récurrence sur r.
Pour $r = 0$, un contact d'ordre 0 correspond à la continuité le long de H. Donc $F(u) = G(u)$, $\forall u \in H$, ce qui devient pour les floraisons

$$f(u^k) = g(u^k) \quad \forall u \in H.$$

Supposons le résultat vrai pour un $r \geq 0$ donné. Si F et G ont un contact d'ordre $r+1$ en $u \in H$, alors $DF(\cdot)$ et $DG(\cdot)$ auront un contact d'ordre r au point u. Par conséquent, l'hypothèse de récurrence prouve que :

$$f^{[1]}(u^{k-1-r}v_1, \dots, v_r; \cdot) = g^{[1]}(u^{k-1-r}v_1, \dots, v_r; \cdot) \;\; \forall v_1, \dots, v_r \in E.$$

Pour $v_1, \dots, v_r$ donnés, l'égalité ci-dessus signifie que :

$$\begin{aligned} f(u^{k-1-r}v_1 \dots v_r v_{r+1}) - f(u^{k-1-r}v_1 \dots v_r v_0)] \\ = g(u^{k-1-r}v_1 \dots v_r v_{r+1}) - g(u^{k-1-r}v_1 \dots v_r v_0)], \end{aligned}$$

quels que soient les points v_0 et v_{r+1} de E.
Pour $v_0 = u$, on obtient :

$$f(u^{k-1-r}v_1 \dots v_{r+1}) - f(u^{k-r}v_1 \dots v_r) = g(u^{k-1-r}v_1 \dots v_{r+1}) - g(u^{k-r}v_1 \dots v_r).$$

Par ailleurs, l'hypothèse de récurrence prouvant aussi que $f(u^{k-r}v_1 \dots v_r) = g(u^{k-r}v_1 \dots v_r)$, on obtient finalement :

$$f(u^{k-1-r}v_1 \dots v_{r+1}) = g(u^{k-1-r}v_1 \dots v_{r+1}) \;\; \forall v_1 \dots v_{r+1} \in E.$$

ii) $\Rightarrow$ iii)

Si on considère $v_1 \dots v_r \in E$ fixés, alors

$$u \in H \longmapsto f(u^{k-r} v_1 \dots v_r)$$

est un polynôme de degré $k - r$. Sa floraison sur H est nécessairement

$$f(u_1 \dots u_{k-r} v_1 \dots v_r).$$

Puisque $f(u^{k-r} v_1 \dots v_r) = g(u^{k-r} v_1 \dots v_r)$ $\forall u \in H$, leur unique floraison doit être la même.

iii) $\Rightarrow$ i)

Cette dernière implication découle du fait que dans le calcul de la dérivée r-ième de F il suffit de connaître la fonction $(v_1 \dots v_r) \longmapsto f(u^{k-r} v_1 \dots v_r)$.

■

On va présenter maintenant des conditions de raccordement pour deux B-patches, F et G. Ces conditions font intervenir les pôles de chaque polynôme par rapport à leur domaine commun.

Théorème 1.39 *Soit H un hyperplan affine de E et supposons que $x_{i,0}, \dots, x_{i,k-r-1} \in H$, $i = 0, \dots, s-1$.*
Alors F et G se raccordent à l'ordre r le long de H **ssi**

$$f(X_\beta) = g(X_\beta) \qquad \forall \beta \quad \textit{tel que } \beta_s \leq r, \quad |\beta| = k.$$

Démonstration :

Ce résultat est une conséquence directe du théorème 1.38 et de l'algorithme de Seidel-De Boor-De Casteljau (version multiaffine).

Supposons que F et G se raccordent à l'ordre r le long de H. On peut assurer pour un β tel que $\beta_s \leq r$, $|\beta| = k$, que X_β possède au moins $k - r$ points sur H. Donc, selon le théorème 1.38, $f(X_\beta) = g(X_\beta)$.

Réciproquement, supposons que pour β, $|\beta| = k$

$$\beta_s \leq r \Rightarrow f(X_\beta) = g(X_\beta).$$

Pour $u \in H$ et $v_1 \dots v_r \in E$ quelconques, il faut prouver que, $f(u^{k-r} v_1 \dots v_r) = g(u^{k-r} v_1 \dots v_r)$.

Observons d'abord que

$$\begin{aligned} & f(X_\beta) = g(X_\beta), |\beta| = k, \beta_s \leq r \\ & \qquad \Rightarrow f(v_1 \dots v_r X_\gamma) = g(v_1 \dots v_r X_\gamma) \quad \text{pour } |\gamma| = k - r, \gamma_s = 0. \end{aligned}$$

En effet, la k-affinité de f permet d'écrire

$$f(v_1 X_\gamma) = \sum_{j=0}^{s} \lambda_{\gamma,j}(v_1) f(X_{\gamma+e_j}).$$

Par conséquent, dans le calcul de $f(v_1 X_\gamma)$ seules interviennent les valeurs $f(X_\beta)$ où β est l'un des $\gamma + e_j$, $j = 0, \ldots, s$. En particulier, on a $\beta_s \leq 1$. Si on continue le raisonnement jusqu'à

$$f(v_1, \ldots, v_r X_\gamma) = \sum_{j=0}^{s} \lambda_{\gamma,j}(v_r) f(v_1, \ldots, v_{r-1} X_{\gamma+e_j}),$$

on conclut que les seules valeurs qui interviennent dans le calcul sont justement les pôles $f(X_\beta)$ avec $\beta_s \leq r$.

Finalement vérifions que les valeurs

$$f(v_1 \ldots v_r X_\gamma), \quad \text{avec } \gamma_s = 0,$$

sont suffisantes pour le calcul de $f(v_1 \ldots v_r u^{k-r})$, $u \in H$.

Par hypothèse, la face $[x_{0,\gamma_0}, \ldots, x_{s-1,\gamma_{s-1}}]$ de Δ_γ est contenue dans H si $|\gamma| \leq k - r$. Donc, si $u \in H$, on a

$$u = \sum_{j=0}^{s-1} \lambda\gamma, j(u)\, x_{j,\gamma_j} \qquad (\text{car } \lambda_{\gamma,s}(u) = 0),$$

et la k-affinité de f permet de conclure. ■

Remarque : Si F et G sont définis par rapport à deux simplexes adjacents X et $\tilde{X}$, partageant une face, c'est-à-dire

$$X_{i,j} = \tilde{X}_{i,j} \qquad \begin{array}{l} i = 0, \ldots, s-1 \\ j = 0, \ldots, k, \end{array}$$

si, de plus, cette face commune vérifie la condition du Théorème 1.39 :

$$X_{i,j} \in H \qquad \begin{array}{l} i = 0, \ldots, s-1 \\ j = 0, \ldots, k-r-1, \end{array}$$

alors la condition de raccordement C^r du théorème correspond à des relations affines entre les pôles $f(X_\beta)$, $\beta_s \leq r$ et $g(\tilde{X}_\beta)$, $\beta_s \leq r$. Pour cela, il suffit d'exprimer $g(X_\beta)$ à partir des $g(\tilde{X}_\beta)$ pour $\beta_s \leq r$ avec l'algorithme de Seidel-De Boor-De Casteljau.

Exemple : Condition C^0.

Seulement $x_{i,k}$, $i = 0, \ldots, s-1$ peuvent se trouver hors de H (rappelons que jusqu'ici les nœuds $x_{i,k}$ n'ont pas été utilisés!). Et la condition de raccordement C^0 s'écrit

$$f(X_\beta) = g(X_\beta) \qquad \forall \beta \quad \beta_s = 0.$$

Autrement dit, les pôles associés à cette face sont les mêmes.

Pour chaque augmentation de l'ordre du raccordement, les conditions sur la face de contact sont diminuées. Mais les conditions affines à vérifier $f(X_\beta) = g(X_\beta), \quad \forall\beta \quad \beta_s \leq r$, sont augmentées.

Exemple : Condition C^{k-1}

Seulement $x_{i,0} \in H \quad i = 0, \ldots, s-1$ mais $f(X_\beta) = g(X_\beta) \quad \forall\beta \quad \beta_s \leq k-1$. Les seuls degrés de liberté correspondent à

$$f(X_{(0,\ldots,0,k)}) \text{ et } g(X_{(0,\ldots,0,k)}).$$

Figure 1.40 : Raccordement de deux B-patches quadratiques

Exemple : Une surface quadratique.

On considère deux triangles de $\mathbb{R}^2$:

$$\Delta_A = [t_0\, t_1\, t_2^A]$$
$$\Delta_B = [t_0\, t_1\, t_2^B]$$

Soient F_A et F_B deux polynômes quadratiques définis sur Δ_A et Δ_B respectivement, qui se raccordent à l'ordre 1 le long du côté commun $[t_0\, t_1]$. Les conditions de raccordement à l'ordre 0 selon le théorème 1.39 sont les suivantes :

$$f_A(t_{0,0},\, t_{0,1}) = f_B(t_{0,0},\, t_{0,1}),$$
$$f_A(t_{0,0},\, t_{1,0}) = f_B(t_{0,0},\, t_{1,0}),$$
$$f_A(t_{1,0},\, t_{1,1}) = f_B(t_{1,0},\, t_{1,1}).$$

Les conditions additionnelles pour assurer le raccordement à l'ordre 1 sont :

$$f_A(t_{0,0},\, t_{2,0}^A) = f_B(t_{0,0},\, t_{2,0}^A),$$
$$f_A(t_{1,0},\, t_{2,0}^A) = f_B(t_{1,0},\, t_{2,0}^A).$$

Mais pour F_B, les pôles devraient faire intervenir $t_{2,0}^B$ au lieu de $t_{2,0}^A$. On peut écrire par exemple :

$$t_{2,0}^A = \lambda_{(1,0,0),0}^B(t_{2,0}^A)\, t_{0,1} + \lambda_{(1,0,0),1}^B(t_{2,0}^A)\, t_{1,0} + \lambda_{(1,0,0),2}^B(t_{2,0}^A)\, t_{2,0}^B$$

et les deux égalités donnent naissance à deux relations affines entre les pôles de F_A et F_B. La première d'entre elles est donnée par :

$$\begin{aligned} f_A(t_{0,0},\, t_{2,0}^A) &= f_B(t_{0,0},\, \lambda_{(1,0,0),0}^B(t_{2,0}^A)\, t_{0,1} + \lambda_{(1,0,0),1}^B(t_{2,0}^A)\, t_{1,0} \\ &\quad + \lambda_{(1,0,0),2}^B(t_{2,0}^A)\, t_{2,0}^B) \\ &= \lambda_{(1,0,0),0}^B(t_{2,0}^A)\, f_B(t_{0,0},\, t_{0,1}) + \lambda_{(1,0,0),1}^B(t_{2,0}^A)\, f_B(t_{0,0},\, t_{1,0}) \\ &\quad + \lambda_{(1,0,0),2}^B(t_{2,0}^A)\, f_B(t_{0,0},\, t_{2,0}). \end{aligned}$$

La deuxième condition donne une relation similaire. Cette première relation implique la coplanarité des quatre pôles correspondants. Plus précisement il faut que les pôles

$$f_A(t_{0,0},\, t_{2,0}^A),\;\; f_{A,B}(t_{0,0},\, t_{0,1}),\;\; f_{A,B}(t_{0,0},\, t_{1,0}),\;\; f_B(t_{0,0},\, t_{2,0}^B)$$

soient image affine du quadrilatère

$$t_{2,0}^A,\;\; t_{0,1},\;\; t_{1,0},\;\; t_{2,0}^B.$$

Conclusions

Les floraisons permettent un traitement très simple des fonctions polynômiales. Les B-patches sont une généralisation naturelle des triangles de Bézier. L'algorithme de Seidel-De Boor-De Casteljau permet d'évaluer la surface. Les dérivées peuvent être calculées avec la version multi-affine de cet algorithme en rappelant la relation entre dérivée et floraison.

Le raccordement C^r entre deux B-patches peut être exprimé très facilement à partir des pôles de chacun. Mais pour une surface composée d'un grand nombre de B-patches, les conditions de raccordement sont en général redondantes. Il n'existe pas un procédé simple pour découpler les conditions de raccordement. Si on veut produire une surface de classe C^r en raccordant plusieurs B-patches, les pôles des B-patches ne peuvent plus être choisis arbitrairement.

Références

[1] Roger GODEMENT, *Cours d'algèbre*, HERMANN, Paris, (1963).

[2] Raúl GORMAZ, Pierre-Jean LAURENT *Some Results on Blossoming and Multivariate B-Splines*, à paraître dans K. Jetter et F. Utreras (eds.) *Multivariate Approximation and Wavelets*. Word Scientific, Singapore, 1993.

[3] Lyle RAMSHAW, *Blossoming : A connect-the-dots approach to splines*, DEC System Research Center Report 19, June (1987), 172 pages.

[4] Lyle RAMSHAW, *Blossoms are polar forms*, *Computer-Aided Geom. Design*, 6, (1989), pages 323–358.

[5] Laurent SCHWARTZ, *Cours d'Analyse*, HERMANN, Paris.

[6] Hans-Peter SEIDEL, *Symmetric triangular algorithms for curves*, *Computer-Aided Geom. Design*, 7, (1991), pages 57–67.

[7] Hans-Peter SEIDEL, *Polar forms and triangular B-spline surfaces*, in : *Blossoming : the new polar-form approach to spline curves and surfaces*, SIGGRAPH'91, 1991, course notes # 26, pages 8.1–8.52.

[8] Hans-Peter SEIDEL, *Symmetric recursive algorithms for surfaces : B-Patches and the De Boor algorithm for polynomials over triangles*, *Constr. Approx.*, 7, (1991), pages 257–279.

Chapitre 2. Splines Simpliciales

A partir d'une caractérisation des splines de base ou B-splines proposée par Curry et Schoenberg [4] à une variable, Carl de Boor [1] a introduit les B-splines à plusieurs variables. A cause de leur définition géométrique, qui fait appel à un simplexe (enveloppe convexe de n points affinement indépendants) dans un espace de dimension plus élevée, le nom de splines simpliciales (*simplex splines* en anglais) a été adopté. Plusieurs auteurs ont fait des articles de synthèse sur ce sujet à différents moments, notamment Dahmen-Micchelli [6] en 1983 et Goodman [7] en 1990.

La première section (section 2.1) est consacrée à rappeler les définitions et résultats fondamentaux relatifs à l'étude des splines simpliciales.

Ensuite, des relations de récurrence sur le degré sont présentées (section 2.2). On donne d'abord une démonstration qui fait usage de la théorie des distributions de L. Schwartz (voir [11]) et qui est due à De Boor-Höllig [2]. Une nouvelle démonstration, cette fois complètement géométrique est présentée.

Pour continuer l'analogie avec le cas unidimensionnel, la section 2.3 présente les splines coniques, extension au cas de plusieurs variables des puissances tronquées. Leur première apparition se trouve dans un article de Dahmen [5]. Il arrive, en étudiant les solutions fondamentales d'un certain opérateur differentiel, à exprimer une spline simpliciale comme combinaison linéaire de splines coniques. On redonne ici le même résultat, mais avec des arguments purement géométriques.

Cohen-Lyche-Riesenfeld dans [3] utilisent les splines coniques pour proposer une nouvelle relation de récurrence, cette fois sur la dimension de l'espace du domaine de la spline. C'est le sujet de la section 2.4.

Finalement, dans la section 2.5 est présentée une étude sur la complexité des différents algorithmes récursifs. Nous avons essayé d'être plus explicite que la plupart des articles pour obtenir des estimations plus réalistes des efforts de calcul requis. C'est en tout cas dans la recherche d'algorithmes pour l'évaluation des splines simpliciales que les plus grands efforts restent encore à faire.

2.1 Propriétés élémentaires

Soit $X = \{x_0, \ldots, x_n\}$ l'ensemble des sommets d'un n-simplexe $\Delta = [X] \subseteq \mathbb{R}^n$.

Supposons $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^k$ (c'est-à-dire $n = s + k$) et considérons la projection canonique :

$$\begin{aligned} P : \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^k &\longrightarrow \mathbb{R}^s \\ x = (u, v) &\longrightarrow u = (u_1, \ldots, u_s). \end{aligned}$$

Définition 2.1 *La spline simpliciale associée à X est la fonction M_X : $\mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :*

$$M_X(u) := Vol_k\big(\Delta \cap P^{-1}(\{u\})\big).$$

Figure 2.2 : Quelques exemples simples.

Théorème 2.3

$$\int_{\mathbb{R}^s} M_X(u)\,\varphi(u)\,du = \int_{[X]} \varphi\big(P(x)\big)\,dx \qquad \forall \varphi \in C^0(\mathbb{R}^s).$$

Démonstration : Notons $\chi_{[X]}(\cdot)$ la fonction indicatrice du simplexe $[X]$, qui vaut 1 sur $[X]$ et 0 ailleurs. Alors

$$\begin{aligned} \int_{[X]} \varphi\big(P(x)\big)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{[X]}(x)\,\varphi\big(P(x)\big)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^s}\int_{\mathbb{R}^k} \chi_{[X]}(u,v)\,\varphi\big(P(u,v)\big)\,dv\,du \\ &= \int_{\mathbb{R}^s} \varphi(u)\Big\{\int_{\mathbb{R}^k} \chi_{[X]}(u,v)\,dv\Big\}du \\ &= \int_{\mathbb{R}^s} \varphi(u)\,M_X(u)\,du. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Quelques conséquences immédiates de la définition :

- $M_X(\cdot) \geq 0$,
- $Supp\, M_X = [X]$

et du théorème (avec $\varphi \equiv 1$)

- $\int_{\mathbb{R}^s} M_X(u)\, du = Vol_n[X]$.

Théorème 2.4 *Pour tout* $\varphi \in C^0(\mathbb{R}^s)$, *on a*

$$\int_{[X]} \varphi\big(P(x)\big)\, dx = n!\, Vol_n[X] \int_{\Sigma_n} \varphi\big(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i\, t_i\big)\, d\lambda_1 \dots d\lambda_n,$$

où $\Sigma_n = \{\lambda \in \mathbb{R}^n \mid \lambda_i \geq 0 \ i = 1, \dots, n,\ \sum_{i=1}^n \lambda_i \leq 1\}$, $t_i = P(x_i)$ *et* $\lambda_0 = 1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

Démonstration : On fait le changement de variable

$$\begin{aligned} G\ : \Sigma_n &\longrightarrow [X] \\ \lambda &\longmapsto x_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - x_0) \end{aligned}$$

Un calcul simple montre que $|det\, DG| = n!\, Vol_n[X]$ et on peut écrire

$$\begin{aligned} \int_{[X]} \varphi\big(P(x)\big)\, dx &= n!\, Vol_n[X] \int_{\Sigma_n} \varphi\Big(P\big(G(\lambda)\big)\Big)\, d\lambda \\ &= n!\, Vol_n[X] \int_{\Sigma_n} \varphi\Big(P\big(x_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - x_0)\big)\Big)\, d\lambda \\ &= n!\, Vol_n[X] \int_{\Sigma_n} \varphi\Big(t_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (t_i - t_0)\Big)\, d\lambda. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Notation : Soit $K = \{t_0, \dots, t_n\} \subseteq \mathbb{R}^s$, on notera

$$\begin{aligned} \int_{[[K]]} \varphi &:= \int_{\Sigma_n} \varphi\Big(t_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (t_i - t_0)\Big) d\lambda \\ &= \int_{\Sigma_n} \varphi\Big(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i\, t_i\Big) d\lambda_1 \dots d\lambda_n, \qquad \text{avec } \lambda_0 = 1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i. \end{aligned}$$

Avec cette notation le résultat précédent s'écrit

$$\int_{[X]} \varphi \circ P = n!\, Vol_n[X] \int_{[[K]]} \varphi$$

et selon le Théorème 2.3

$$\int_{\mathbb{R}^s} \frac{M_X(u)}{Vol_n[X]} \varphi(u)\, du = n! \int_{[[K]]} \varphi \qquad \forall \varphi \in C^0. \tag{2.5}$$

Ceci entraîne en particulier que $M_X(u)/Vol_n[X]$ est complètement déterminé par $K = \{t_0 = P(x_0), \ldots, t_n = P(x_n)\}$.

Remarque : Si X est un n-simplexe dans un espace de dimension plus grande que n, les mêmes raisonnements s'appliquent, mais cette fois $\int_{[X]} \varphi \circ P$ est une intégrale sur la variété $[X]$ avec la mesure induite.

Définition 2.6 *La fonction spline simpliciale normalisée associée à K est donnée par*

$$M(u|K) := \frac{M_X(u)}{Vol_n[X]} .$$

On remarque que cette normalisation correspond à choisir

$$\int_{\mathbb{R}^s} M(u|K)\, du = 1.$$

Pour retrouver la relation entre les splines simpliciales et les B-splines classiques à une variable on fait appel à la formule de Hermite-Gennochi. Celle-ci donne une représentation intégrale des différences divisées.

Soit $K = \{t_0, \ldots, t_n\} \subset \mathbb{R}$ (donc $s = 1$); on a alors

$$[t_0, \ldots, t_n](\varphi) = \int_{[[K]]} \varphi^{(n)},$$

où $[t_0, \ldots, t_n]$ représente la différence divisée d'ordre n basée sur les nœuds $t_0, \ldots, t_n$. La démonstration se fait par récurrence. Pour le cas $n = 1$, le calcul direct est le suivant :

$$\begin{aligned}
\int_{[[K]]} \varphi' &= \int_0^1 \varphi'(t_0 + \lambda_1(t_1 - t_0))\, d\lambda_1 \\
&= \left. \frac{\varphi(t_0 + \lambda_1(t_1 - t_0)}{(t_1 - t_0)} \right]_{\lambda_1=0}^{\lambda_1=1} \\
&= \frac{\varphi(t_1) - \varphi(t_0)}{t_1 - t_0} \\
&= [t_0, t_1]\varphi.
\end{aligned}$$

Dans le cas à une variable, la B-spline classique est donnée par l'expression

$$\mathcal{N}(u|t_0, \ldots, t_n) = (t_n - t_0)[t_0, \ldots, t_n](\cdot - u)_+^{n-1}, \tag{2.7}$$

où les réels $t_0, \ldots, t_n$ sont supposés rangés dans l'ordre croissant. Le résultat suivant est dû à Schoenberg-Curry [4], et a ouvert la voie pour la généralisation des B-splines au cas de plusieurs variables avec le travail de Carl de Boor [1].

Théorème 2.8 *Dans le cas $s = 1$ on a la relation suivante :*

$$\mathcal{N}(u|K) = \frac{(t_n - t_0)}{n} M(u|K).$$

Démonstration : Rappelons la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \varphi(a) + \varphi'(a)(t-a) + \cdots \\
&\quad \cdots + \frac{\varphi^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(t-a)^{n-1} + \int_a^t \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}\,\varphi^{(n)}(x)\,dx \\
&= \varphi(a) + \varphi'(a)(t-a) + \cdots \\
&\quad \cdots + \frac{\varphi^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(t-a)^{n-1} + \int_a^{+\infty} \frac{(t-x)_+^{n-1}}{(n-1)!}\,\varphi^{(n)}(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Si on applique l'opérateur de différences divisées aux deux côtés de l'égalité, puisque la différence divisée d'ordre n d'un polynôme de degré inférieur à n est nulle, on obtient :

$$\begin{aligned}
[t_0,\ldots,t_n]\varphi &= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^{+\infty} \varphi^{(n)}(x)\,[t_0,\ldots,t_n](t-x)_+^{n-1}\,dx \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^{+\infty} \varphi^{(n)}(x)\,\frac{\mathcal{N}(x|t_0,\ldots,t_n)}{(t_n - t_0)}\,dx.
\end{aligned}$$

La formule d'Hermite-Gennocchi nous donne alors

$$\begin{aligned}
[t_0,\ldots,t_n]\varphi &= \int_{[[K]]} \varphi^{(n)} \\
&= \frac{1}{n!}\int_{\mathbb{R}} M(u|K)\,\varphi^{(n)}(u)\,du.
\end{aligned}$$

Comme ces développements sont valables pour tout φ, on en déduit

$$M(u|K) = \frac{n}{t_n - t_0}\mathcal{N}(u|K). \qquad \blacksquare$$

La définition suivante utilise la notion de distribution au sens de Schwartz (voir [11]). Une distribution est une fonctionnelle linéaire définie sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^s) = \{\varphi \ : \ \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R} \mid \varphi$ de classe C^∞ à support compact $\}$. L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^s)$ est appellé aussi espace des fonctions test et les distributions constituent le dual de cet espace.

Définition 2.9 *La spline simpliciale normalisée associée à $K = \{t_0,\ldots,t_n\}$ est la distribution*

$$\varphi \longmapsto n! \int_{[[K]]} \varphi.$$

Théorème 2.10 *Si $Vol_s[K] > 0$, alors la distribution spline simpliciale normalisée peut être identifiée à la fonction spline simpliciale (voir Def. 2.6).*

Démonstration : Il suffit de construire un simplexe ayant pour sommets un ensemble $X = \{x_0, \ldots, x_n\}$ tel que $t_i = P(x_i)$, pour $i = 0, \ldots, n$. La formule (2.5) permettra de conclure.

Supposons que $Vol_s[t_0, \ldots, t_s] > 0$, (après une éventuelle renumérotation) et soient $p_0 = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^k$, $p_1 = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^k, \ldots, p_k = (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{R}^k$. Le n-simplexe recherché peut être défini par l'ensemble de sommets suivant :

$$X = \{(t_0, p_0), \ldots, (t_s, p_0), (t_{s+1}, p_1), (t_{s+2}, p_2), \ldots, (t_{s+k}, p_k)\}.$$

On peut calculer le volume de ce simplexe et on obtient

$$Vol_n[X] = \frac{n!}{s!} Vol_s[t_0, \ldots, t_s]. \qquad \blacksquare$$

Voyons quelques exemples simples.

• Soit $K = \{t_0, \ldots, t_0\}$, alors

$$\begin{aligned}(M(\cdot|K), \varphi) &= n! \int_{\Sigma_n} \varphi(t_0) d\lambda \\ &= \varphi(t_0),\end{aligned}$$

donc $M(\cdot|K) = \delta_{t_0}$, la distribution de Dirac en t_0.

• Soit $k = 0$. Comme dans ce cas la projection canonique P est l'identité de $\mathbb{R}^s$, on a d'après le théorème 2.3,

$$\int_{\mathbb{R}^s} Vol_s[K]\, M(u|K)\, \varphi(u)\, du = \int_{[K]} \varphi(u)\, du,$$

d'où l'on conclut que

$$M(\cdot|K) = \frac{\chi_{[K]}(\cdot)}{Vol_s[K]}.$$

Remarque : Dans la relation $n = s + k$, s indique le nombre de variables ($u \in \mathbb{R}^s$), et k le degré de la spline. On verra que la spline est en général une fonction polynômiale par morceaux de degré k.

2.2 Les relations de récurrence

Micchelli [9] et Dahmen [5] ont été les premiers à présenter des relations de récurrence qui permettent d'exprimer une spline (simpliciale) de degré k comme une combinaison affine de splines de degré $(k-1)$. On a vu dans la section précédente que les splines de degré 0 étaient, à un facteur multiplicatif près, les fonctions indicatrices des simplexes. Le calcul d'une spline serait donc en principe possible par un schéma récursif sur le degré. Plusieurs propriétés des splines découleront de ces relations. On va présenter d'abord une démonstration de De Boor-Höllig [2] qui nous paraît simple et générale. Ensuite on présentera une démonstration géométrique, aussi élémentaire que possible. Etant donné le caractère géométrique à l'origine des splines simpliciales, cette démonstration nous semble utile.

La géométrie du simplexe $V = [X]$ est très "simple". Son bord est formé de $n+1$ faces, qui sont elles aussi des simplexes. Chacune sera l'enveloppe convexe de n sommets, le sommet manquant sera dit sommet opposé à la face. Notons $V_i := [X_i]$ avec $X_i := X \setminus \{x_i\}$ cette face.

Figure 2.11 : Les faces d'un simplexe.

Théorème 2.12 *Soit n_i la normale extérieure de V_i, $i = 1, \ldots, n$.*

i) $DM_X(u).P(x) = -\sum_{i=0}^{n} < x, n_i > \ M_{X_i}(u) \qquad \forall x \in I\!R^n,$

ii) $kM_X(P(x)) = \sum_{i=0}^{n} < b_i - x, n_i > \ M_{X_i}(P(x)) \qquad \forall x \in I\!R^n,$

où b_i est un point quelconque de V_i.

Démonstration :

i) En appliquant successivement les propriétés des distributions et la formule de Stokes, on obtient :

$$
\begin{aligned}
(DM_X(\cdot)\,P(x),\varphi) &= -(M_X, D\varphi(\cdot)\,P(x)) \\
&= -\int_{[X]} D\varphi(u)\,P(x)\circ P \\
&= -\int_V D\varphi\circ P\,(u)\,x \\
&= -\sum_{i=0}^{n} < x, n_i > \int_{V_i} \varphi\circ P.
\end{aligned}
$$

ii) Soit $\mathcal{D}$ l'opérateur différentiel défini par

$$
\mathcal{D}\varphi(u) := \sum_{i=1}^{s} u_i\,D_i\varphi(u),
$$

où $D_i\varphi(u) = D\varphi(u)\,e_i$ (i-ème dérivée partielle). Alors

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{D}M_X,\varphi) &= \sum_{i=1}^{s}(D_iM_X, u_i\varphi) \\
&= -\sum_{i=1}^{s}(M_X, D_i(u_i\varphi)) \\
&= -(sM_X,\varphi) - (M_X, \sum_{i=1}^{s} u_iD_i\varphi).
\end{aligned}
$$

Développons en détail le dernier terme

$$
(M_X, \sum_{i=1}^{s} u_iD_i\varphi) = \sum_{i=1}^{s}\int_V u_i\,D_i(\varphi\circ P),
$$

et, puisque $\varphi\circ P$ ne dépend pas de x_j pour $j > s$,

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n}\int_V x_iD_i(\varphi\circ P) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\int_V D_i(x_i.\varphi\circ P) - \varphi\circ P \\
&= -n\int_V \varphi\circ P + \sum_{i=1}^{n}\int_{\partial V} < n, e_i > \; x_i\,\varphi\circ P \\
&= -n\int_V \varphi\circ P + \int_{\partial V} < n, x > \; \varphi\circ P \\
&= -n\int_V \varphi\circ P + \sum_{j=0}^{n}\int_{V_j} < n_j, x > \varphi\circ P.
\end{aligned}
$$

On a montré la relation suivante,

$$\mathcal{D}M_X = kM_X - \sum_{j=0}^{n} < n_j, x > M_{V_j}.$$

Si on prend x tel que $u = P(x)$, on peut dire que $\mathcal{D}M_X(\cdot) = DM_X(\cdot)\,P(x)$ et le résultat s'obtient en appliquant i) à cette relation. ■

Présentons, avant de continuer, un résultat classique sur le volume d'un cône tronqué. Soit $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un convexe $(n-1)$-dimensionnel et $\mathcal{O} \notin \mathrm{Aff}\,(C)$. Le cône convexe tronqué qui a pour base C et pour sommet $\mathcal{O}$ est l'ensemble

$$T := co\Big(C \cup \{\mathcal{O}\}\Big).$$

La hauteur du cône est la distance de $\mathcal{O}$ à l'hyperplan affine engendré par C :

$$H := dist(\mathcal{O}, \mathrm{Aff}\,(C)).$$

Le résultat est le suivant :

Lemme 2.13

$$Vol_n T = \frac{1}{n} \cdot H \cdot Vol_{n-1} C.$$

Démonstration :

Puisque le volume sur $\mathbb{R}^n$ est invariant par translation et par rotation on peut supposer, sans perte de généralité, que $\mathcal{O}$ se trouve sur l'origine de $\mathbb{R}^n$ et que C est parallèle à l'hyperplan des $(n-1)$ premières coordonnées. Donc

$$C = \tilde{C} \times H, \qquad \text{avec } \tilde{C} \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

En particulier, $Vol_{n-1}C = Vol_{n-1}\tilde{C}$. De cette façon, on peut représenter T par $T = G(\tilde{C} \times [0,1])$ où $G(p,\lambda) := \lambda(p,H)$. On peut vérifier que $|det\,DG| = \lambda^{n-1}H$, donc

$$\begin{aligned} Vol_n T &= \int_T dx \\ &= \int_{\tilde{C}} \int_0^1 \lambda^{n-1} H \, d\lambda \, dp \\ &= \frac{1}{n} \cdot H \int_{\tilde{C}} dp. \qquad ■ \end{aligned}$$

Remarque : $[X] = co\Big([X_i] \cup \{x_i\}\Big)$, donc $Vol_n[X] = (1/n) \cdot Vol_{n-1}[X_i] \cdot dist(x_i, \mathrm{Aff}\,(X_i))$.

Théorème 2.14
a) Si $\vec{v} = \sum_{i=0}^{n} \mu_i \, t_i$, *avec* $\sum_{i=0}^{n} \mu_i = 0$, *alors :*

$$DM(u|K)\,\vec{v} = n \sum_{i=0}^{n} \mu_i \, M(u|K_i) \qquad \forall u \in I\!R^s,$$

où $K_i := K \setminus \{t_i\}$.
b) Si $u = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \, t_i$, *avec* $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$, *alors :*

$$M(u|K) = \frac{n}{k} \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \, M(u|K_i) \qquad \forall u \in I\!R^s.$$

Démonstration :
a) Si $\vec{x} = \sum_{i=0}^{n} \mu_i \, x_i \in \mathbb{R}^n$, alors

$$< \vec{x}, n_i >= -n \, \mu_i \, \frac{Vol_n[X]}{Vol_{n-1}[X_i]}. \tag{2.15}$$

En effet, il est facile de vérifier que

$$\vec{x} = \sum_{j \neq i} \mu_j \, (x_j - x_i)$$

et que $< x_j - x_i, n_i >= dist(x_i, \mathrm{Aff}\,(X_i))$. Le lemme 2.13 permet de déduire 2.15, et le théorème 2.12 i) devient l'affirmation a) du corollaire.

b) Soit $x = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \, x_j \in \mathbb{R}^n$; alors

$$\begin{aligned} < b_i - x, n_i > &= \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \; < b_i - x_j, n_i > \\ &= \lambda_i \; < b_i - x_i, n_i > \\ &= \lambda_i \, dist(x_i, \mathrm{Aff}\,(X_i)) \end{aligned}$$

et le lemme permet à nouveau de conclure. ∎

Figure 2.16 : Exemple de spline linéaire.

Exemple : Soient $t_0 = (0,0)$, $t_1 = (1,0)$, $t_2 = (0,1)$ et $t_3 = (1,1)$. Alors pour $u = (u_1, u_2)$ on a l'expression

$$u = u_1 t_1 + u_2 t_2 + (1 - u_1 - u_2) t_0;$$

donc

$$M(u|K) = \frac{3}{1}\left\{ u_1 M(u|K_1) + u_2 M(u|K_2) + (1 - u_1 - u_2) M(u|K_0) \right\},$$

et le calcul direct pour les splines de degré 0 donne

$$\begin{aligned} M(u|K_1) &= 2\chi_{[t_0,t_2,t_3]}(u) \\ M(u|K_2) &= 2\chi_{[t_0,t_1,t_3]}(u) \\ M(u|K_0) &= 2\chi_{[t_1,t_2,t_3]}(u). \end{aligned}$$

Citons deux conséquences directes des formules de récurrence :

i) $M(u|K)$ est formée de morceaux de polynômes de degré k.

ii) Si K est en position générale, c'est-à-dire, si tout s-simplexe basé sur $(s+1)$ sommets de K est non dégénéré, alors $M(u|K) \in C^{k-1}(\mathbb{R}^s)$. En effet, ses dérivées (au sens des distributions) appartiennent à $L^2(\mathbb{R}^s)$ jusqu'à l'ordre k.

Plus précisement, la dérivée d'ordre r de $M(\cdot|K)$ sera discontinue le long d'un hyperplan affine H si la dérivée d'ordre $r+1$ n'est plus dans L^2. Ceci se produit si, pour la dérivée d'ordre $r+1$, une des splines présentes dans l'expression obtenue par récurrence correspond à un ensemble de nœuds contenu dans l'hyperplan. Comme chaque terme présent dans l'expression de la dérivée d'ordre $(r+1)$ correspond à une spline basée sur un ensemble de $(n-r)$ nœuds, il y aura une spline avec ses $(n-r)$ nœuds sur H.

Supposons que H est engendré par $\{t_{i_1}, \ldots, t_{i_s}\}$ et soit d le nombre de nœuds sur H en plus des s points $t_{i_1}, \ldots, t_{i_s}$. Comme $n - r = s + d$, on trouve pour r l'expression $r = k - d$. Ainsi, $M(\cdot|K)$ sera C^{r-1}, i.e., C^{k-1-d}.

Pour une démonstration géométrique directe du corollaire 2.14 partie b), montrons d'abord le résultat suivant :

Lemme 2.17 *Si $K_i := K \setminus \{t_i\}$ vérifie $Vol_s[K_i] > 0$,*

$$M(t_i|K) = \frac{n}{k} M(t_i|K_i).$$

Démonstration : Soit $H = P^{-1}(\{t_i\})$; c'est une variété affine de dimension k de $\mathbb{R}^n$. Donc $H \cap [X]$ est un convexe de dimension k. Additionnellement, puisque $x_i \in H$ est un sommet de $[X]$:

$$H \cap [X] = co\Big(\{x_i\} \cup \big([X_i] \cap H\big)\Big),$$

ce qui s'écrit aussi :

$$M_X(t_i) = \frac{1}{k} dist(x_i, \mathrm{Aff}\,(X_i) \cap H) \cdot M_{X_i}(t_i).$$

Les points x_i peuvent être choisis quelconques, mais tels que $P(x_i) = t_i$ et $Vol_n[X] > 0$. Avec ces restrictions, il est possible de choisir X de façon que la droite qui passe par x_i et sa projection sur Aff (X_i) soit contenue dans H (l'hypothèse permet de choisir, par exemple, $x_j \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ pour $j \neq i$). Dans ce cas

$$\begin{aligned} dist(x_i, \mathrm{Aff}\,(X_i) \cap H) &= dist(x_i, \mathrm{Aff}\,(X_i)) \\ &= n\, Vol_n[X]/Vol_{n-1}[X_i]. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Théorème 2.18 *Soit* $u = \sum_{i=0}^n \lambda_i\, t_i$, *avec* $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$. *Alors*

$$M(u|K) = \frac{n}{k} \sum_{i=0}^{n} \lambda_i\, M(u|K_i) \tag{2.19}$$

en tout point $u \in \mathbb{R}^s$ *où chaque* $M(\cdot|K_i)$, $i = 0, \ldots, n$, *est continue.*

Démonstration : Supposons d'abord que les λ_i soient positifs ou nuls. Dans ce cas $x := \sum_{i=0}^n \lambda_i\, x_i \in [X]$ et

$$[X] = \bigcup_{i=0}^{n} \Big[X_i \cup \{x\}\Big],$$

c'est-à-dire :

$$M_X(u) = \sum_{i=0}^{n} M_{X_i \cup \{x\}}(u),$$

ou encore :

$$M_X(u) = \sum_{i=0}^{n} \frac{Vol_n\Big[X_i \cap \{x\}\Big]}{Vol_n[X]} M(u|X_i \cup \{u\}).$$

Mais comme les coordonnées barycentriques de x par rapport à X sont données par

$$\lambda_i = \frac{Vol_n\Big[X_i \cap \{x\}\Big]}{Vol_n[X]},$$

le lemme 2.17 permet de conclure.

Si les λ_i sont de signe arbitraire, on considère deux cas.

- Si $u \notin [K]$, les deux membres de (2.19) sont nuls.
- Si $u \in int[K]$, étudions la fonction affine

$$\varphi \ : \ \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$$

définie par $\varphi(\lambda) := \frac{n}{k} \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \, M(u|K_i)$ avec $\Sigma := \{\lambda \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1\}$.

Soit Σ_u la variété affine contenue dans Σ définie par

$$\Sigma_u = \{\lambda \in \Sigma \mid \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \, t_i = u\}.$$

Puisque $u \in int[K]$, il existe au moins un $\lambda \in \Sigma_u$ tel que $\lambda_i > 0$, $i = 0, \ldots, n$. Donc, dans un voisinage, relatif à Σ_u, d'un tel λ la première partie de la démonstration s'applique et φ sera constante et égale à $M(u|K)$. Donc φ sera constante sur Σ_u.

Finalement, un point u de la frontière de $[K]$ peut être approximé par des points de $int[K]$. Donc, si toutes les splines simpliciales présentes dans (2.19) sont continues en u, l'égalité est nécessairement vérifiée en u. ■

Remarque : Si, par application des formules de récurrence, on a $Vol_s[K] > 0$ mais $Vol_s[K_i] = 0$ pour au moins un indice $i \in \{0, \ldots, n\}$, on peut ignorer les éléments correspondants dans la somme. Le résultat est bien une fonction de L^2 et non une distribution, donc les éléments singuliers doivent s'annuler entre eux!

Des problèmes peuvent de toutes façons se produire à travers des régions de la forme $F = [t_{i_1}, \ldots, t_{i_s}]$. Si on poursuit la récurrence jusqu'à retrouver les fonctions indicatrices de s-simplexes, un point $u \in F$ se trouvera sur la face d'un de ces s-simplexes, et alors l'évaluation sera ambiguë puisque la fonction indicatrice sera discontinue en ce point.

2.3 Les puissances tronquées ou splines coniques

Pour poursuivre l'analogie avec le cas unidimensionnel, on va introduire les splines coniques ([5], [3]). Elles généralisent les puissances tronquées, $(x - a)_+^k$, au cas de plusieurs variables.

Soit $Y = \{y_1, \ldots, y_n\} \subset \mathbb{R}^s$, tel que

- $0 \notin [Y]$
- $\mathrm{Lin}\, Y_I = \mathbb{R}^s \qquad \forall I \subseteq \{1, \ldots, n\}, |I| = s,$

où on note $Y_I := \{y_i \mid i \in I\}$.

Définition 2.20 $C(\cdot|Y)$ *est la distribution définie par*

$$\big(C(\cdot|Y),\varphi\big) := \int_{\mathbb{R}^n_+} \varphi(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, y_i) d\lambda_1 \dots d\lambda_n .$$

Comme pour le cas des splines simpliciales, une définition géométrique est possible, cette fois à partir d'un cône de $\mathbb{R}^n$.

Soit, comme avant, $P \;:\; \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^s$ la projection canonique et soit $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ une base de $\mathbb{R}^n$ telle que $y_i = P(x_i)$. Les hypothèses sur Y entraînent l'existence d'une telle base. Un changement de variable nous donne :

$$\int_{cc(X)} \varphi(P(x))\, dx = \int_{\mathbb{R}^n_+} \varphi(P(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, x_i))\, |detX|\, d\lambda, \tag{2.21}$$

où on note $cc(X) = \{x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, x_i \mid \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$, le cône convexe engendré par X.

En suivant un raisonnement analogue à celui du théorème 2.3, écrivons

$$\begin{aligned} \big(C(\cdot|Y),\varphi\big) &= \frac{1}{|detX|} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(P(x))\, \chi_{cc(X)}(x)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^s} \varphi(u) \Big\{ \frac{1}{|detX|} \int_{\mathbb{R}^k} \chi_{cc(X)}(u,v) dv \Big\} du, \end{aligned}$$

donc

$$C(u|Y) = \frac{1}{|detX|} Vol_k\{x \in cc(X) \mid P(x) = u\}.$$

Remarque : Ce volume est borné $\forall u \in \mathbb{R}^s$ ssi $0 \notin [Y]$.

Quelques propriétés élémentaires :

i) pour $n = s$,

$$C(u|Y) = \frac{\chi_{cc(Y)}(u)}{|detY|}.$$

ii) $C(tu|Y) = t^k C(u|Y) \qquad \forall t > 0, \quad (k := n - s)$.

En effet, avec quelques changements de variable,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^s} C(tu|Y)\, \varphi(u)\, du &= \int_{\mathbb{R}^s} C(\tilde{u}|Y)\, \varphi(\frac{\tilde{u}}{t})\, t^{-s}\, d\tilde{u} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n_+} \varphi(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, \frac{y_i}{t})\, t^{-s}\, d\lambda \\ &= t^{n-s} \int_{\mathbb{R}^n_+} \varphi(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, y_i) d\lambda. \end{aligned}$$

Cette propriété permet d'appeler puissances tronquées les splines coniques. En particulier, pour $Y = \{y_1, \ldots, y_{k+1}\} \subset \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} C(t \cdot 1|Y) &= t^k C(1|Y) \\ &= ct^k \qquad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

On peut aussi vérifier que $C(-1|Y) = 0$, donc

$$C(t|Y) = ct_+^k.$$

iii) $DC(u|Y)y_j = C(u|Y_j) \qquad j = 1, \ldots, n$, où $Y_j = Y \setminus \{y_j\}$. Pour simplifier la notation, supposons ici que $j = n$. Alors

$$\begin{aligned} \Big(DC(\cdot|Y)y_n, \varphi(\cdot)\Big) &= -\Big(C(\cdot|Y), D\varphi(\cdot)y_n\Big) \\ &= -\int_{\mathbb{R}_+^n} D\varphi(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i) y_n d\lambda_1 \ldots d\lambda_n \\ &= -\int_{\mathbb{R}_+^{n-1}} \int_0^{+\infty} \frac{d\varphi}{d\lambda_n} (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i) d\lambda_n d\lambda_1 \ldots d\lambda_{n-1} \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^{n-1}} \varphi(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i y_i) d\lambda_1 \ldots d\lambda_{n-1} \end{aligned}$$

puisque φ est à support borné.

De proche en proche, on constate finalement que

$$D^n C(\cdot|Y)\, y_1 \ldots y_n = \delta,$$

où δ est la distribution de Dirac.

Pour les splines coniques, des relations de récurrence peuvent être établies très facilement.

Théorème 2.22
(a) Si $v = \sum_{i=1}^n \mu_i\, y_i$, *alors*

$$DC(u|Y)\, v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i\, C(u|Y_i).$$

(b) Si $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i\, y_i$, *alors*

$$C(u|Y) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, C(u|Y_i).$$

Démonstration :
(a) Comme $DC(u|Y)\,v = \sum_{i=1}^n \mu_i\, DC(u|Y)\,y_i$, il suffit d'appliquer la propriété (iii) précédente.

(b) D'une part, en appliquant (a),

$$DC(u|Y)\,u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, C(u|Y_i),$$

et d'autre part, en utilisant la propriété (ii) précédente, on obtient

$$\begin{aligned} DC(u|Y)\,u &= \frac{d}{dt}\, C(tu|Y)\big|_{t=1} \\ &= \frac{d}{dt}\Big(t^k\, C(u|Y)\Big)\Big|_{t=1} \\ &= kC(u|Y). \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Corollaire 2.23 *Si $s = 1$ et si tous les y_i vérifient $y_i > 0$, alors*

$$C(u|Y) = \frac{u_+^k}{k!\prod_{i=1}^n y_i}.$$

Démonstration : Pour $n = 1$, puisque $\chi_{cc\{y_1\}}(u) = u_+^0$,

$$C(u|y_1) = \frac{u_+^0}{y_1}.$$

En général, en remarquant que $u = (u/y_n)\cdot y_n$, on a

$$C(u|Y) = \frac{1}{k}\frac{u}{y_n}C(u|Y_n),$$

ce qui prouve le résultat par récurrence. $\blacksquare$

Remarque : A partir de ces relations de récurrence, on peut faire des remarques similaires à celles faites pour les splines simpliciales à propos de leur structure. Dans ce cas, $C(\cdot|Y)$ est une fonction polynômiale par morceaux de degré $k = n - s$. Les régions où elle est polynômiale sont limitées par les hyperplans $H_I = \operatorname{Lin} Y_I$, $\quad |I| = s - 1$. Les morceaux se raccordent C^r le long des H_I, où $r = k - 1 - d$ avec $d = \#\{y_j \in Y \mid y_j \in H_I \text{ et } j \notin I\}$. En particulier, si tout sous-ensemble de s vecteurs de Y est linéairement indépendant, $C(\cdot|Y) \in C^{k-1}(\mathbb{R}^s)$.

On peut établir une relation entre la spline simpliciale et la spline conique qui généralise la formule classique à une variable suivante :

$$M(u|K) = n\sum_{j=0}^{n} \frac{(t_j - u)_+^k}{\prod_{l\neq j}(t_j - t_l)}.$$

Cette formule peut être établie en utilisant par exemple l'expression de la spline comme une différence divisée.

Nous procéderons ici de façon géométrique. On établira une relation entre un simplexe et une famille de cônes.

Un cône convexe $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$, de sommet l'origine et ne contenant aucune droite ($x \in \Gamma \Rightarrow -x \notin \Gamma$), permet de définir une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^n$:

$$x \preceq_\Gamma y \Leftrightarrow y - x \in \Gamma.$$

Lemme 2.24 *Soit* $M = \{d_1, \ldots, d_m\} \subseteq \mathbb{R}^s$. *Il existe* $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m) \in \{-1, +1\}^m$ *tel que* $P = cc(\varepsilon_1 d_1, \ldots, \varepsilon_m d_m)$ *soit un cône convexe de sommet l'origine et ne contenant aucune droite.*

Démonstration : Soit $\tilde{M} := \{-d_1, +d_1, \ldots, -d_m, +d_m\}$ et soit $S := \{\lambda \in \mathbb{R}^s | \; ||\lambda|| = 1\}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^s$.

A chaque $\lambda \in S$ on peut associer l'hyperplan

$$H_\lambda = \{u \in \mathbb{R}^s | < \lambda, u >= 0\}.$$

Supposons qu'il existe $\lambda \in S$ tel que $H_\lambda \cap \tilde{M} = \emptyset$; alors, pour chaque i, d_i et $-d_i$ se trouvent de part et d'autre de H_λ. Notons $\varepsilon_i d_i$ celui qui se trouve du côté "positif", c'est-à-dire, $< \lambda, \varepsilon_i d_i >> 0$. Avec ce choix, P ne pourra contenir aucune droite qui passe par l'origine.

Montrons finalement qu'un tel $\lambda \in S$ existe. Pour cela, soit

$$\begin{aligned} L &= \{\lambda \in S | H_\lambda \cap \tilde{M} \neq \emptyset\} \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} \{\lambda \in S | < \lambda, d_i >= 0\}. \end{aligned}$$

L'ensemble L est l'union d'un nombre fini de "cercles" tracés sur la sphère S. Ils ne peuvent pas recouvrir toute la sphère, donc il existe $\lambda \in S$, $\lambda \notin L$. ∎

Considérons maintenant $K = \{t_0, \ldots, t_n\} \subseteq \mathbb{R}^s$ et soit $M = \{t_j - t_i \mid 0 \leq i < j \leq n\}$. Selon le lemme 2.24, il existe $\varepsilon = (\varepsilon_{ij})_{i<j}$ tel que

$$\Gamma = cc\Big(\varepsilon_{ij}(t_i - t_j)\Big)_{i<j}$$

définisse une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^s$. Si on note $\varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji}$, on peut écrire

$$\Gamma = cc\Big(\varepsilon_{ij}(t_i - t_j)\Big)_{i,j}.$$

Le cône Γ définit un ordre total sur K, où $t_i \preceq_\Gamma t_j$ est équivalent à $\varepsilon_{ij} \geq 0$. Supposons, pour simplifier la notation, que les t_i soient déjà ordonnés :

$$t_0 \preceq_\Gamma t_1 \preceq_\Gamma \cdots \preceq_\Gamma t_n$$

et notons

$$\begin{aligned} D_i &= \{\varepsilon_{ij}(t_i - t_j) | j = 0, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n\} \\ &= \{t_i - t_0, \ldots, t_i - t_{i-1}, t_{i+1} - t_i, \ldots, t_n - t_i\}. \end{aligned}$$

Puisque $cc(D_i) \subseteq \Gamma$, $cc(D_i)$ ne contient aucune droite, ou, ce qui est équivalent, $0 \notin [D_i]$. Alors $C(\cdot|D_i)$ est bien défini et on a le résultat suivant :

Théorème 2.25

$$M(u|K) = n! \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C(u - t_i | D_i).$$

Démonstration : Soit $[X] \subseteq \mathbb{R}^n$ un n-simplexe qui vérifie $P(x_i) = t_i$. Comme auparavant, $\lambda_i(x)$ dénote la i-ème coordonnée barycentrique de x par rapport à ce simplexe. Notons

$$H_i = \{x | \lambda_i(x) = 0\}$$

l'hyperplan affine engendré par la facette $[X_i]$, et

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_i^+ &= \{x | \lambda_i(x) > 0\} \\ \mathcal{D}_i^- &= \{x | \lambda_i(x) < 0\} \end{aligned}$$

les deux demi-espaces ouverts correspondant à H_i.

On peut prouver que

$$\begin{aligned} x_i + cc\{x_i - x_0, \ldots, x_i - x_{i-1}, x_{i+1} - x_i, \ldots, x_n - x_i\} \\ = \bigcap_{j=0}^{i-1} \mathcal{D}_j^- \bigcap_{j=i+1}^{n} \mathcal{D}_j^+. \end{aligned}$$

Notons $\mathcal{D}_i$ ce cône de sommet x_i. Montrons d'abord que :

$$\mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}_j = \emptyset \qquad \text{ssi} \qquad |i - j| > 1. \tag{$*$}$$

En effet, d'une part

$$\mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}_{i+1} = \mathcal{D}_0^- \cap \ldots \mathcal{D}_i^- \cap \mathcal{D}_{i+1}^+ \cap \ldots \cap \mathcal{D}_n^+,$$

et par exemple, $x = \sum_j \lambda_j x_j$ avec $\lambda_0 = \cdots = \lambda_i = -1$ et $\lambda_{i+1} = \cdots = \lambda_n = +1$ appartient à $\mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}_{i+1}$.

D'autre part, si $j > i + 1$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_i &= \bigcap_{l<i} \mathcal{D}_l^- \bigcap_{l>i} \mathcal{D}_l^+ \subset \mathcal{D}_{i+1}^+ \\ \text{et} \quad \mathcal{D}_j &= \bigcap_{l<j} \mathcal{D}_l^- \bigcap_{l>j} \mathcal{D}_l^+ \subset \mathcal{D}_{i+1}^- \end{aligned}$$

donc, $\mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}_j = \emptyset$.

Montrons maintenant que

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \, \chi_{\mathcal{D}_i}(\cdot) = \chi_{[X]}(\cdot) \quad \text{presque partout.} \tag{$**$}$$

On montre que l'égalité est vérifiée partout, sauf peut-être sur les hyperplans H_i. Soit alors $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\lambda_i(x) \neq 0$, $i = 0, \ldots, n$.

Premier cas, $x \in [X]$.

Dans ce cas, $x \in \mathcal{D}_0$ et $x \notin \mathcal{D}_i$ pour $i = 1, \ldots, n$, donc

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \, \chi_{\mathcal{D}_i}(x) = (-1)^0 \, \chi_{\mathcal{D}_0}(x) = 1.$$

Deuxième cas, $x \notin [X]$ et il existe i_0 tel que $x \in \mathcal{D}_{i_0}$.

Puisque $x \notin H_{i_0}$, ou bien $x \in \mathcal{D}_{i_0}^-$ ou bien $x \in \mathcal{D}_{i_0}^+$. Ici, $i_0 \neq 0$, puisque $[X] \subset \mathcal{D}_0^+$ mais $x \notin [X]$. Donc $x \in \mathcal{D}_{i_0}$ peut se trouver additionnellement ou bien dans $\mathcal{D}_{i_0-1}$ ou bien dans $\mathcal{D}_{i_0+1}$. Et, à cause de (*), x se trouve exactement sur deux $\mathcal{D}_i$ consécutifs, d'où :

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \, \chi_{\mathcal{D}_i}(x) = 0.$$

Troisième cas, $x \notin [X]$ et $x \notin \mathcal{D}_{i_0}$, $i = 0, \ldots, n$. Cas évident!

La démonstration se termine en appliquant les définitions géométriques des splines à la formule (**) :

$$\begin{aligned}
\Big(M(\cdot|K), \varphi\Big) &= \frac{1}{Vol_n[X]} \Big(M_X(\cdot), \varphi\Big) \\
&= \frac{1}{Vol_n[X]} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{[X]}(x) \, \varphi(x) \, dx \\
&= \frac{1}{Vol_n[X]} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\mathcal{D}_i}(x) \, \varphi(x) \, dx.
\end{aligned}$$

Puisque $|det(x_i - x_0, \ldots, x_i - x_{i-1}, x_{i+1} - x_i, \ldots, x_n - x_i)| = n! Vol_n[X]$, la formule 2.21 permet de conclure. ■

2.4 Relations de récurrence sur la dimension.

On présente ici un résultat dû à Cohen-Lyche-Riesenfeld [3].

Soit $\{v_1, , \ldots, v_s\}$ une base de $\mathbb{R}^s$, et soit $H := \mathrm{Aff}\,\{v_1, , \ldots, v_s\}$ l'hyperplan affine qu'elle engendre.

Pour $y \in \mathbb{R}^s$, $y \notin \vec{H}$, il existe un scalaire $\pi(y)$ non nul tel que

$$\frac{y}{\pi(y)} \in H.$$

Comme $\{v_1, , \ldots, v_s\}$ est affinement indépendant, il existe des $\lambda_i(y)$ uniques, $i = 1, \ldots, s$, de somme 1 qui vérifient

$$\frac{y}{\pi(y)} = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i(y)\, v_i.$$

Ceci peut s'écrire

$$y = \pi(y)\, V\lambda(y), \tag{2.26}$$

où on note V la matrice qui a pour colonnes les vecteurs v_i de la base, et où $\lambda(y)$ est le vecteur de $\mathbb{R}^s$ de composantes $\lambda_i(y)$. Notons $\mathbb{1} = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^s$, alors

$$\begin{aligned} < \mathbb{1}, V^{-1}y > &= \pi(y) < \mathbb{1}, \lambda(y) > \\ &= \pi(y), \end{aligned}$$

par conséquent, on a

$$\lambda(y) = \frac{V^{-1}y}{\pi(y)}.$$

Notons ici T la projection

$$\begin{aligned} T \ : \ \mathbb{R}^s &\longrightarrow \mathbb{R}^{s-1} \\ y &\longmapsto (y_2, \ldots, y_s). \end{aligned}$$

Théorème 2.27 *Soit $Y = \{y_1, \ldots, y_n\} \subseteq \mathbb{R}^s$ tel que $0 \notin [Y]$ et $\mathrm{Lin}\, Y = \mathbb{R}^s$.*

Si $V = (v_1, , \ldots, v_s)$ est une matrice régulière vérifiant, avec les notations précédentes,

$$\pi(y_i) > 0 \qquad i = 1, \ldots, n,$$

alors

$$C(u|Y) = \alpha\, \pi(u)_+^k\, M\big(T\lambda(u) \,|\, T\lambda(Y)\big)$$

pour tout $u \in \mathbb{R}^s$, $u \notin \vec{H}$ (donc $\pi(u) \neq 0$), où $k := n - s$ et où

$$\alpha := \frac{1}{(n-1)!\, |detV| \prod_j \pi(y_j)}.$$

Démonstration : Posons

$$I := \int_{\mathbb{R}^s} \pi(u)_+^k \, M\big(T\lambda(u) \,|\, T\lambda(Y)\big) \, \varphi(u) \, du.$$

Faisons le changement de variable

$$u \longmapsto (\pi(u), \lambda_2(u), \ldots, \lambda_s(u)) = (\pi(u), T\lambda(u)).$$

Puisque $\sum_{i=1}^s \lambda_i(u) = 1$, on peut exprimer $\lambda_1(u) = 1 - \sum_{i=2}^s \lambda_i(u)$ et, d'après (2.26),

$$\begin{aligned} u &= \pi(u)V\lambda(u) \\ &= \pi(u)(1 - \sum_{i=2}^s \lambda_i(u))v_1 + \pi(u)\sum_{i=2}^s \lambda_i(u)v_i. \end{aligned}$$

Notons

$$G(h, \lambda_2, \ldots, \lambda_s) := h(1 - \sum_{i=2}^s \lambda_i)v_1 + h\sum_{i=2}^s \lambda_i v_i.$$

La transformation G vérifie $G(\pi(u), \lambda_2(u), \ldots, \lambda_s(u)) = u$ et un calcul simple nous montre que $detDG(h, \lambda_2, \ldots, \lambda_s) = h^{s-1} detV$. Notons $\tilde{\lambda} := (\lambda_2, \ldots, \lambda_s)$, et soit Λ la transformation $\tilde{\lambda} \longmapsto \lambda$, donc $\Lambda\tilde{\lambda} = (1 - \sum_{i=2}^s \lambda_i, \lambda_2, \ldots, \lambda_s)$. L'intégrale I peut alors se réécrire avec les variables $(h, \tilde{\lambda})$ sous la forme :

$$\begin{aligned} I &= |detV| \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^{s-1}} h_+^{n-1} M(\tilde{\lambda}|\tilde{\lambda}(Y)) \, \varphi(hV\Lambda\tilde{\lambda}) \, d\tilde{\lambda} \, dh \\ &= (n-1)!|detV| \int_0^{+\infty} h^{n-1} \int_{\Sigma_n} \varphi\big(hV\Lambda(\sum_{i=1}^n \nu_i \tilde{\lambda}(y_i))\big) \, d\nu \, dh \\ &= (n-1)!|detV| \int_0^{+\infty} h^{n-1} \int_{\Sigma_n} \varphi\big(hV \sum_{i=1}^n \nu_i \, \lambda(y_i))\big) \, d\nu \, dh \\ &= (n-1)!|detV| \int_0^{+\infty} h^{n-1} \int_{\Sigma_n} \varphi\big(\sum_{i=1}^n h\nu_i \frac{y_i}{\pi(y_i)}\big) \, d\nu \, dh, \end{aligned}$$

où on a utilisé (2.26) dans la dernière ligne.

Effectuons enfin un dernier changement de variable. Passons de (h, ν) à μ défini par

$$\mu = \Big(\frac{h\nu_1}{\pi(y_1)}, \ldots, \frac{h\nu_n}{\pi(y_n)}\Big).$$

On a cette fois

$$detD\mu = \frac{h^{n-1}}{\prod_{j=0}^n \pi(y_j)},$$

donc

$$I = (n-1)!|detV| \int_{\mathbb{R}^n_+} \prod_{j=0}^{n} \pi(y_j)\, \varphi(\sum_{j=1}^{n} \mu_j\, y_j)\, d\mu$$
$$= (n-1)!|detV| \prod_{j=0}^{n} \pi(y_j) \int_{\mathbb{R}^s} C(u|Y)\, \varphi(u)\, du. \qquad \blacksquare$$

Exemple : Pour $s = 2$, soit $V = (e_1, e_2)$; alors $\pi(u) = u_1 + u_2$,

$$\lambda(u) = \Big(\frac{u_1}{u_1 + u_2}, \frac{u_2}{u_1 + u_2}\Big)$$

et

$$T\lambda(u) = \frac{u_2}{u_1 + u_2}.$$

Soient $t_i = (a_i, b_i)$, $i = 1, \ldots, n$, tels que $a_i + b_i > 0$. Alors, pour $u \in \mathbb{R}^s$ tel que $u_1 + u_2 \neq 0$, on a

$$C(u|t_0, \ldots, t_n) = \alpha\, (u_1 + u_2)_+^{n-1}\, M\Big(\frac{u_2}{u_1 + u_2}\Big|\frac{b_0}{a_0 + b_0}, \ldots, \frac{b_n}{a_n + b_n}\Big)$$

et

$$\alpha = \frac{1}{n! \prod_{i=0}^{n}(a_i + b_i)}.$$

Corollaire 2.28 *Soit* $u^* = \Lambda u = (1 - \sum_{i=1}^{n} u_i, u) \in \mathbb{R}^{n+1}$*; alors*

$$M(u|K) = n! C(u^*|K^*) \qquad \forall u \in \mathbb{R}^s.$$

Démonstration : On applique le théorème 2.27 avec $V = (e_1, \ldots, e_{s+1})$, c'est-à-dire, la matrice identité d'ordre $s + 1$:

$$\pi(u^*) = < \mathbb{1}, V^{-1} u^* >$$
$$= u_0 + \sum_{i=1}^{n} u_i = 1.$$

De plus

$$T(\lambda(u^*)) = T\Big(\frac{V^{-1}u^*}{\pi(u^*)}\Big)$$
$$= T(u^*)$$
$$= u.$$

Finalement, $\alpha = 1/n!$. ■

Une nouvelle démonstration de la relation de récurrence est maintenant possible. Soit $u = \sum \lambda_i t_i$, donc $u^* = \sum \lambda_i t_i^*$. Si on applique la relation de récurrence aux splines coniques avec la formule du corollaire précédent, on obtient :

$$\begin{aligned} M(u|K) &= n!C(u^*|K^*) \\ &= n!\Big(\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{n} \lambda_i\, C(u_i^*|K_i^*)\Big) \\ &= \frac{n!}{k}\sum_{i=0}^{n} \lambda_i\, \frac{M(u|K_i)}{(n-1)!} \\ &= \frac{n}{k}\sum_{i=0}^{n} \lambda_i\, M(u|K_i). \end{aligned}$$

Supposons que $K = \{t_0, \ldots, t_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ soit ordonné au sens de la section 2.4 et posons comme plus haut :

$$D_i = \{t_i - t_0, \ldots, t_i - t_{i-1}, t_{i+1} - t_i, \ldots, t_n - t_i\}.$$

Soit $V = (v_1, \ldots, v_s)$ une matrice régulière vérifiant

$$\pi_i := \pi(t_i) < \pi_j := \pi(t_j) \qquad \text{pour } i < j.$$

Géométriquement, ceci veut dire que les projections des t_i sur la droite normale à l'hyperplan Aff $\{v_1, \ldots, v_s\}$ gardent l'ordre initial. On peut alors énoncer le théorème de récurrence sur la dimension s.

Théorème 2.29 *Pour $u \in \mathbb{R}^s$ tel que $\pi(u) \neq \pi_i$, $i = 1, \ldots, n$, on a l'expression*

$$M(u|K) = \frac{(-1)^n\, n}{|detV|} \sum_{i=0}^{n} \frac{(\pi(u) - \pi_i)_+^k\, M\big(T\lambda(u - t_i)|T\lambda(D_i)\big)}{\prod_{j\neq i}(\pi_i - \pi_j)}.$$

Démonstration : On sait, grâce au théorème 2.25, que :

$$M(u|K) = n!\sum_{i=0}^{n}(-1)^i C(u - t_i|D_i).$$

Le théorème 2.27 nous permet d'écrire

$$C(u - t_i|D_i) = \alpha\, \pi(u - t_i)_+^k\, M\big(T\lambda(u - t_i)|T\lambda(D_i)\big).$$

En effet, vérifions les hypothèses du théorème 2.27.

Puisque $\pi_i > \pi_j$, $\forall i > j$, on a $\pi(d) > 0$, $\forall d \in D_i$. Et, par hypothèse, $\pi(u - t_i) = \pi(u) - \pi(t_i) \neq 0$.

Pour α, l'expression se réduit à

$$\alpha = \Big((n-1)!\,|detV| \prod_{j\neq i} \varepsilon_{ij}\pi(t_j - t_i)\Big)^{-1}$$

Finalement, comme $\varepsilon_{ij} = -1$ pour $j = 0, \dots, i-1$ (puisque $i < j \Leftrightarrow \varepsilon_{ij} \leq 0$), on obtient

$$\alpha = \frac{(-1)^i\,(-1)^n}{(n-1)!\,|detV| \prod_{j\neq i} \pi_i - \pi_j},$$

d'où l'expression du théorème. ■

2.5 Etude de la complexité des méthodes d'évaluation.

Pour l'évaluation d'une spline simpliciale $M(u|K)$, on dispose de deux algorithmes récursifs :

- d'une part, celui obtenu à partir des relations de récurrence découvertes par Dahmen et par Micchelli (cf. théorème 2.18) où l'on exprime la spline simpliciale de degré k de s variables comme une combinaison affine de splines simpliciales de degré $k-1$, aussi de s variables.

- d'autre part, l'algorithme obtenu à partir des relations de récurrence découvertes par Cohen-Lyche-Riesenfeld (cf. théorème 2.29). On exprime dans ce cas la spline simpliciale de degré k de s variables comme une combinaison linéaire de splines simpliciales de degré k, mais cette fois de $s-1$ variables.

On notera dans cette section $\Delta(s)$ le coût du calcul des coordonnées barycentriques d'un point $u \in \mathbb{R}^s$ par rapport à un s-simplexe donné.

Soit alors $C(s,k)$ le coût du calcul d'une spline simpliciale à s variables et de degré k en utilisant la récurrence sur le degré.

Si on néglige le coût du calcul de la combinaison affine à réaliser à chaque étape, on obtient l'expression suivante pour $C(s,k)$:

Lemme 2.30

$$C(s,k) = \Delta(s)\big((s+1)^{k+1} - 1\big).$$

Démonstration :

La relation de récurrence s'écrit :

$$M(u|K) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i\, M(u|K_i) \quad \text{avec} \quad \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1.$$

Si on choisit $s+1$ points de K qui définissent un s-simplexe (si K est en position générale, on peut choisir les $s+1$ premiers points de K, par exemple) et si on calcule les coordonnées barycentriques de u par rapport au s-simplexe ainsi constitué, la somme précédente ne contiendra que $s+1$ termes. Si on néglige alors les s sommes et produits, on peut écrire la relation suivante pour les coûts :

$$C(s,k) = \Delta(s) + (s+1)C(s,k-1).$$

Pour $k=0$ on peut supposer que $C(s,0) = \Delta(s)$.

On peut finalement prouver par récurrence que

$$\begin{aligned} C(s,k) = \Delta(s) + &\Delta(s)(s+1) + \Delta(s)(s+1)^2 + \cdots \\ &\cdots + \Delta(s)(s+1)^k, \end{aligned}$$

d'où le résultat. ∎

Remarque : Si le point u où l'on veut évaluer la spline simpliciale se trouve sur une des lignes de nœuds, on doit prendre des précautions supplémentaires. En effet, quand on arrive au dernier niveau dans lequel il faut additionner des splines de degré zéro, quelques-unes de celles-ci seront discontinues au point u. L'évaluation devient ambiguë dans ce cas et on risque de sommer des termes en trop.

Soit maintenant $D(s,k)$ le coût du calcul d'une spline simpliciale à partir des relations de récurrence sur la dimension. On ne considère pas le pré-calcul des quantités qui ne dépendent pas de u, et comme avant, on néglige le calcul de la combinaison linéaire présente à chaque étape.

L'expression pour le coût $D(s,k)$ est donnée par le lemme suivant :

Lemme 2.31

$$D(s,k) = \frac{1}{2}\frac{(k+s+1)!}{(k-1)!(k+2)}\Delta(1) + \sum_{j=2}^{s}\frac{(k+s+1)!}{(k+j)!}\Delta(j).$$

Démonstration : On utilise les mêmes notations que dans la section 2.4. Pour le calcul de $M(u|K)$ il faut calculer $n+1 = s+k+1$ expressions de la forme

$$M\big(T\lambda(u-t_i)|T\lambda(D_i)\big).$$

Puisque $T\lambda(D_i)$ ne dépend pas de u, il peut être pré-calculé. D'autre part, $\lambda(u-t_i)$ correspond au calcul d'un barycentre dans $\mathbb{R}^s$. En effet, soient $\eta_i := \eta_i(y)$, $i = 0,\ldots,s$, les coordonnées barycentrique de $y \in \mathbb{R}^s$ par rapport au s-simplexe $[\mathbf{0}, v_1, \ldots, v_s]$. Puisque $y = \eta_0\,\mathbf{0} + \sum_{i=1}^{s}\eta_i\,v_i$, avec $\eta_0 + \sum_{i=1}^{s}\eta_i = 1$, on obtient l'expression suivante pour λ :

$$\lambda = \frac{1}{1-\eta_0}(\eta_1,\ldots,\eta_s).$$

On peut alors établir la relation suivante pour les coûts :

$$D(s,k) = (s+k+1)\Big(\Delta(s) + D(s-1,k)\Big)$$

D'autre part, pour $s = 1$, on peut appliquer l'algorithme de De Boor pour l'évaluation d'une spline, donc

$$D(1,k) = \frac{1}{2}k(k+1)\Delta(1).$$

La formule peut ainsi être vérifiée par récurrence. ∎

Pour $s = 2$, on peut obtenir les expressions suivantes pour les coûts associés à chaque méthode :

$$\begin{aligned} C(2,k) &= \Delta(2)(3^{k+1}-1), \\ D(2,k) &= \frac{1}{2}k(k+1)(k+3)\Delta(1) + (k+3)\Delta(2). \end{aligned}$$

Pour comparer ces deux expressions, on peut utiliser le fait que $\Delta(2) \approx 3\Delta(1)$ pour obtenir

$$\begin{aligned} C(2,k) &= 3\Delta(1)(3^{k+1}-1), \\ D(2,k) &= (k+3)\Delta(1)\big(\frac{k(k+1)}{2} + 3\big), \end{aligned}$$

d'où les complexités connues pour ces deux algorithmes :

$$C(2,k) = o(3^k) \quad \text{et} \quad D(2,k) = o(k^3).$$

Ceci montre l'interêt d'utiliser les relations de récurrence sur la dimension, bien que du point de vue stabilité des calculs, la récurrence sur le degré soit préférable. Mais il faut dans ce cas faire attention de choisir, à chaque étape, des s-simplexes qui produisent des coordonnées barycentriques positives, ce qui augmente encore le coût des calculs de l'algorithme. Grandine [8] propose pour ce faire des méthodes de programmation linéaire et aussi une méthode pour l'évaluation de la spline simpliciale le long des lignes de nœuds.

Pour une spline quadratique, il y a un facteur 2 lorsqu'on passe d'une méthode à l'autre. Mais pour une spline quintique, ce facteur devient déjà un peu plus grand que 10. Ces facteurs théoriques sont en parfait accord avec les résultats obtenus par M. Neamtu [10].

Dans la section 3.4 nous proposons une méthode différente d'évaluation d'une spline simpliciale qui présente certains avantages par rapport à celles qui ont été présentées ici.

Références

1. De Boor C., *Splines as linear combinations of B-splines*, in G.G.Lorentz, C.K.Chui and L.L.Schumaker (eds.), Approximation Theory 2, Academic Press, New York, (1976), pages 1–47.
2. De Boor C., Höllig K., *Recurrence relation for multivariate splines*, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 85, (1982), pages 397–400.
3. Cohen E., Lyche T. et Riesenfeld R.F., *Cones and recurrence relations for simplex splines Constr. Approx.*, 3, (1987), pages 131–141.
4. Curry H.B., Schoenberg I.J., *On Pólya frequency functions IV; The fundamental spline functions and their limits*, *J. Analyse Math.*, **17**, (1966), pages 71–107.
5. Dahmen W., *On multivariate B-splines*, *SIAM J. Numer. Anal.*, 17, (1980), pages 179–191.
6. Dahmen W., Micchelli C.A., *Recent progress in multivariate splines*, in : "*Approximation Theory IV*", C.K. Chui et al., eds., (1983), Acad. Press, pages 27–121.
7. Goodman T.N.T., *Polyhedral splines*, in : "*Computation of curves and surfaces*", W. Dahmen et al., eds., (1990), Kluwer Acad. Publis. pages 347–382.
8. Grandine T.A., *Stable evaluation of multivariate simplex splines*, *Math. Comp.*, 50, (1988), pages 197–205.
9. Micchelli C.A. *A constructive approach to Kergin interpolation in $\mathbb{R}^k$: Multivariate B-splines and Lagrange interpolation*, *Rocky Mt. J. Math.*, 10, (1980), pages 485–497.
10. Neamtu M., *Simplex Splines*, Thèse U. de Twente, The Neederlands, (1992).
11. Laurent SCHWARTZ, *Théorie des Distributions*, HERMANN, Paris.

Chapitre 3. Différences Divisées et Splines Simpliciales

Ce chapitre développe en détail des résultats de H. Hakopian ([3] et [4]). En particulier, sa proposition de différence divisée pour des fonctions à plusieurs variables, sur laquelle quelques altérations sont effectuées, sera notre point de départ.

La section 3.1 rappelle quelques résultats sur la transformée de Fourier de splines simpliciales ou coniques. On fait de même pour la transformée de Radon.

On passe ensuite à notre définition de différence divisée dans la section 3.2. Ses principales propriétés sont présentées. Le résultat principal de la section, qui étend à notre schéma un résultat de Hakopian, exprime une différence divisée d'ordre p comme combinaison linéaire de différences divisées d'ordre zéro. Ceci généralise le résultat classique à une variable où les différences divisées d'ordre zéro sont les évaluations ponctuelles. Malheureusement, dans le cas de plusieurs variables, les différences divisées d'ordre zéro sont des moyennes de la fonction sur des $(s-1)$-simplexes.

La section 3.3 présente quelques résultats qui résultent de l'application directe des propriétés de cette différence divisée. En particulier, le résultat sur le saut de la dérivée k-ième d'une spline simpliciale simplifie celui de [3].

Un algorithme d'évaluation d'une spline simpliciale en utilisant l'expression du saut de la dérivée k-ième le long des lignes de nœuds est proposé dans la section 3.4. Par rapport aux algorithmes étudiés dans la section 2.5, celui-ci présente certains avantages, notamment en ce qui concerne le coût de calcul.

3.1 Transformée de Fourier d'une fonction spline

Parmi les fonctions de $\mathbb{R}^s$ dans $\mathbb{R}$, il y a une classe extrêmement simple. Il s'agit de la classe des fonctions *ridge* qu'on notera $\mathcal{R}$ qui est composée des fonctions $F : \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}$ de la forme $F(u) = g(< w, u >)$, où g est une fonction arbitraire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et w est un élément arbitraire de $\mathbb{R}^s$. Ce sont des fonctions essentiellement à une variable. D'après 1.19, $\mathrm{Lin}\,\mathcal{R}$ contient toutes les fonctions polynômiales. En particulier, $\mathrm{Lin}\,\mathcal{R}$ est dense dans $C(\Omega)$ au sens de la norme uniforme sur tout compact $\Omega \subseteq \mathbb{R}^s$.

Théorème 3.1 *Soit $F(\cdot) = g(< w, \cdot >) \in \mathcal{R}$. Alors*

$$\int_{\mathbb{R}^s} F(u)\, M(u|K)\, du = \int_{\mathbb{R}} g(x)\, M(x|w \cdot K)\, dx,$$

où $w \cdot K := \{< w, t_0 >, \ldots, < w, t_n >\}$.

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^s} F(u)\, M(u|K)\, du &= \int_{\Sigma_n} F(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i\, t_i)\, d\lambda \\
&= \int_{\Sigma_n} g(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i\, < w, t_i >)\, d\lambda \\
&= \int_{\mathbb{R}} g(x)\, M(x|w \cdot K)\, dx. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Il en résulte que le calcul de la tranformée de Fourier d'une spline simpliciale peut se faire très simplement.

Corollaire 3.2 *La transformée de Fourier $\hat{M}$ de $M(\cdot|K)$ est donnée par*

$$\hat{M}(\xi) = \frac{n!(-1)^n}{(2\pi i)^n} \sum_{j=0}^{n} \frac{e^{-2\pi i < \xi, t_j >}}{\prod_{k \neq j} < \xi, t_j - t_k >}.$$

Démonstration : On a

$$\hat{M}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^s} e^{-2\pi i < \xi, u >}\, M(u|K)\, du,$$

et, puisque la fonction $u \longmapsto e^{-2\pi i < \xi, u >}$ appartient à $\mathcal{R}$,

$$\begin{aligned}
\hat{M}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i x}\, M(x|\xi \cdot K)\, dx \\
&= \frac{1}{(-2\pi i)^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{-2\pi i x}\right)^{(n)} M(x|\xi \cdot K)\, dx
\end{aligned}$$

et selon la formule d'Hermite-Genocchi :

$$= \frac{n!}{(-2\pi i)^n}[<\xi, t_0>, \dots, <\xi, t_n>]\, e^{-2\pi i x},$$

d'où le résultat. ∎

Soit S la sphère unité de $\mathbb{R}^s$ et soit F une fonction définie sur $\mathbb{R}^s$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. La transformée de Radon de F est la fonction donnée par :

$$\begin{aligned} RF\ &: S \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ &(\lambda, t) \longmapsto RF(\lambda, t) = \int_{H_{\lambda,t}} F, \end{aligned}$$

où $H_{\lambda,t} = \{u \in \mathbb{R}^s \mid\ <\lambda, u>= t\}$.

Corollaire 3.3

$$RM(\cdot|K)(\lambda, t) = M(t|\lambda \cdot K).$$

Démonstration : Pour $g\ :\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, on a

$$\int_{\mathbb{R}^s} M(u|K)\, g(<\lambda, u>)\, du = \int_{\mathbb{R}} M(x|\lambda \cdot K)\, g(x)\, dx$$

et avec le changement de variable $u \longmapsto (t, v)$ défini par $u = t\lambda + v$ avec $t \in \mathbb{R}$ et $v \in H_{\lambda,0}$ on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^s} M(u|K)\, g(<\lambda, u>)\, du &= \int_{\mathbb{R}} \int_{H_{\lambda,0}} M(t\lambda + v|K)\, g(t)\, dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} RM(\cdot|K)(\lambda, t)\, g(t)\, dt. \qquad ∎ \end{aligned}$$

Figure 3.4 : Interprétation de la transformée de Radon d'une spline simpliciale.

Sur $\mathbb{R}^2$, l'interprétation géométrique est la suivante (voir Figure 3.4). Soit L la droite engendrée par λ. Sur L on peut définir une coordonnée locale t en associant à t le point $P_t = L \cap H_{\lambda,t} \in L$. Pour chaque t, la valeur $RM(\cdot|K)(\lambda, t)$ correspond à l'intégrale de la spline simpliciale $M(\cdot|K)$ le long de la droite perpendiculaire à L qui passe par P_t. De cette façon on obtiendra sur L une spline simpliciale à une variable, qui aura comme nœuds les projections sur L des nœuds de M. Mais attention, le degré ne sera pas le même, il sera augmenté de 1.

La transformée de Radon d'une spline conique est également simple à calculer.

Corollaire 3.5 *Pour toute direction λ telle que $< \lambda, y_j >> 0$, $j = 1, \ldots, n$, on a :*

$$RC(\cdot|Y)(\lambda, t) = \frac{t_+^{n-1}}{(n-1)! \prod_{j=1}^n < \lambda, y_j >}.$$

Démonstration : Comme dans la démonstration du théorème 3.3, pour $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ arbitraire, on a

$$\int_{\mathbb{R}^s} C(u|Y)\, g(< \lambda, u >)\, du = \int_{\mathbb{R}} RC(\cdot|Y)(\lambda, t)\, g(t)\, dt.$$

D'autre part, il est facile à voir que

$$\int_{\mathbb{R}^s} C(u|Y)\, g(< \lambda, u >)\, du = \int_{\mathbb{R}} C(t|\lambda \cdot Y)\, g(t)\, dt.$$

On conclut en se rappelant que la spline conique à une variable est donnée par (voir corollaire 2.23) :

$$C(t|\lambda \cdot Y) = \frac{t_+^{n-1}}{(n-1)! \prod_{j=1}^n < \lambda, y_j >}. \qquad \blacksquare$$

Figure 3.6 : Interprétation de la transformée de Radon d'une spline conique

Ceci s'interprète sur $\mathbb{R}^2$ de la façon suivante (voir Figure 3.6). Soient $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^2$ tels que $< \lambda, y_j >> 0$, $j = 1, \ldots, n$.

On peut définir une coordonnée z, le long de la droite $H := H_{\lambda,t}$, au moyen de la longueur d'arc. Soient z_i les coordonnées des intersections entre la droite H et les demi-droites $\mathbb{R}_+\{y_j\}$, $j = 1, \ldots, n$. Puisque la spline conique est une fonction polynômiale de degré $k = n - 2$ par morceaux, la restriction de la spline à H sera une fonction polynômiale par morceaux de degré $n-2$ de la variable z. Elle est nécessairement proportionnelle à la spline à une variable basée sur les nœuds $z_1, \ldots, z_n$, donc

$$C(u|Y) = cM(z(u)|z_1, \ldots, z_n) \qquad \forall u \in H.$$

Le calcul de la constante c utilise le corollaire 3.5 :

$$\begin{aligned} c &= c\int_{-\infty}^{+\infty} M(z|z_1, \ldots, z_n)\, dz \\ &= \int_H C(\cdot|Y) \\ &= \frac{t_+^{n-1}}{(n-1)! \prod_{j=1}^n < \lambda, y_j >}. \end{aligned}$$

Nous terminons cette section en donnant une formule fort utile.

Corollaire 3.7

$$\int_{\mathbb{R}^s} \frac{M(u|K)}{(1+ < w, u >)^{n+1}}\, du = \frac{1}{\prod_{j=0}^n (1+ < w, t_j >)}.$$

Démonstration : Soit $g(t) := 1/(1+t)$. La dérivée n-ième de g est :

$$g^{(n)}(t) = \frac{(-1)^n}{(1+t)^{n+1}}\, n!.$$

Si on applique le théorème 3.1 et la formule d'Hermite-Genocchi,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^s} \frac{M(u|K)}{(1+ < w, u >)^{n+1}}\, du &= \frac{(-1)^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} M(t|w \cdot K)\, g^{(n)}(t)\, dt \\ &= (-1)^n [< w, t_0 >, \ldots, < w, t_n >]\, g(\cdot). \end{aligned}$$

La démonstration se termine alors en utilisant le fait que les différences divisées de $g(\cdot)$ sont données par :

$$[x_0, \ldots, x_n] g = \frac{(-1)^n}{\prod_{j=0}^n (1 + x_j)}. \qquad \blacksquare$$

3.2 Des différences divisées à plusieurs variables

Plusieurs définitions de différences divisées pour des fonctions de plusieurs variables ont été proposées (voir par exemple [3], [5] et [6]). Chacune a ses avantages et ses inconvénients. Cavaretta-Micchelli-Sharma [1] ont remarqué que dans un certain sens ("lifting" d'un opérateur), l'opérateur différence divisée n'admet pas de généralisation au cas de plusieurs variables. Cette généralisation, naturelle dans beaucoup d'autres problèmes (développement de Taylor, dérivée directionnelle ou même B-spline), utilise la classe $\mathcal{R}$ des fonctions ridge. Si une telle généralisation dans ce sens existait, on aurait pour $K = \{t_0, \ldots, t_n\} \subset \mathbb{R}^s$:

$$[t_0, \ldots, t_n]F(\cdot) = [< w, t_0 >, \ldots, < w, t_n >]g(\cdot),$$

où $F(u) = g(< w, u >)$. Puisque la classe $\mathcal{R}$ engendre au moins tous les polynômes, des arguments de densité permettraient d'étendre la fonctionnelle linéaire $[t_0, \ldots, t_n](\cdot)$ à des espaces de fonctions plus riches.

Mais dans le cas $K = \{t_0, t_1\}$ et $F(u) \equiv < w, u >$ (donc $g(t) \equiv t$), on obtiendrait :

$$[< w, t_0 >, < w, t_1 >]g(\cdot) = 1 \qquad \forall w.$$

D'autre part, comme $[t_0, t_1]$ est une fonctionnelle linéaire,

$$\begin{aligned} 2 &= 2\,[t_0, t_1]F(\cdot) \\ &= [t_0, t_1]2F(\cdot) \\ &= [< 2w, t_0 >, < 2w, t_1 >]g(\cdot) \\ &= 1, \end{aligned}$$

d'où une contradiction. Toute définition possible ne pourra donc pas reposer de cette façon sur le cas unidimensionnel.

Définition 3.8 *L'opérateur de différence divisée d'ordre $p(= k+1)$, basée sur $K = \{t_0, \ldots, t_n\} \subset \mathbb{R}^s$ avec $n := p + s - 1$ est défini par*

$$[K]_p\varphi(\cdot)\, h_1 \ldots h_p := \frac{n!}{p!} \int_{[[K]]} D^p\varphi(\cdot)(h_1 \ldots h_p) \qquad (3.9)$$

pour $\varphi \in C^p(\mathbb{R}^s)$, et $h_1, \ldots, h_p \in \mathbb{R}^s$.

L'équation 3.9 est équivalente à

$$p![K]_p\varphi(\cdot)\, h_1 \ldots h_p = \int_{\mathbb{R}^s} D^p\varphi(\cdot)(h_1 \ldots h_p)\, M(u|K)\, du. \qquad (3.10)$$

Dans un certain sens, la formule d'Hermite-Genocchi est prise comme définition.

Enonçons quelques propriétés évidentes de cette différence divisée :

- $[K]_p$ ne dépend pas de l'ordre des éléments de K.

- $[K]_p\varphi(\cdot)$ est une forme p-linéaire symétrique.
- $[K]_p : C^p \longrightarrow \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^s;\mathbb{R})$ est linéaire.
- $[K]_p\varphi(\cdot) = \frac{1}{p!}D^p\varphi(\xi)$ pour un $\xi \in co(K)$.
- $[K]_pF \equiv 0$ si F est une fonction polynômiale de degré $p-1$.

Dans le cas d'une variable ($s=1$), cette différence divisée correspond à la différence divisée usuelle en prenant $(h_1,\ldots,h_p)=(1,\ldots,1)$. Malheureusement, pour $s>1$, ces différences divisées ne se calculent pas à partir d'évaluations ponctuelles des fonctions φ. Par exemple, pour $p=0$, un calcul direct utilisant l'expression 3.10 montre que

$$[K]_0\varphi = \frac{1}{Vol_{s-1}[K]}\int_{[K]}\varphi. \tag{3.11}$$

C'est donc la moyenne de φ sur $[K]$. Pour $s=1$, $[K]=\{t_0\}$ et on retrouve bien $\varphi(t_0)$.

Le cas $p=1$ est significatif. Ici $n := p+s-1 = s$, donc $K=\{t_0,\ldots,t_s\}$ définit un s-simplexe sur $\mathbb{R}^s$.

$$[K]_1\varphi(\cdot)h = \int_{\mathbb{R}^s} D\varphi(u)\,h\cdot M(u|K)\,du.$$

Comme

$$M(u|K) = \frac{\chi_{[K]}(u)}{Vol_s[K]}\ ,$$

il en résulte

$$\begin{aligned}[K]_1\varphi(\cdot)h &= \frac{1}{Vol_s[K]}\int_{[K]} D\varphi(u)h\,du\\ &= \frac{1}{Vol_s[K]}\int_{\partial[K]}\varphi(u)\ <n,h>\ dS\\ &= \sum_{i=0}^{n}\frac{Vol_{s-1}[K_i]}{Vol_s[K]}\ <h,n_i>\ [K_i]_0\varphi,\end{aligned}$$

où n_i est la normale extérieure à la face $[K_i]$. La différence divisée d'ordre 1 est donc une combinaison linéaire de différences divisées d'ordre zéro. Ceci est un cas particulier d'un résultat général qu'on prouvera un peu plus loin dans cette section. Pour $s=1$ et $h=1$, cette formule s'écrit :

$$[t_0,t_1]\varphi(\cdot)(+1) = \frac{+1}{(t_1-t_0)}\varphi(t_1) + \frac{1}{(t_1-t_0)}\varphi(t_0).$$

Pour $s=2$, on trouve :

$$[t_0,t_1,t_2]\varphi\,h = \langle\frac{\varphi_0L_0\vec{n}_0+\varphi_1L_1\vec{n}_1+\varphi_2L_2\vec{n}_2}{aire[t_0,t_1,t_2]},h\rangle,$$

où

$$\begin{aligned}\varphi_i &= \text{ moyenne de } \varphi \text{ sur } [K_i] = [K \setminus \{t_i\}],\\ n_i &= \text{ normale extérieure à } [K_i],\\ L_i &= \text{ longueur de } [K_i].\end{aligned}$$

Exemple : Soit $F(u) = g(< w, u >)$, avec $K = \{t_0, t_1\} \subset \mathbb{R}^2$. La différence divisée d'ordre zéro est donnée par :

$$[t_0, t_1]F = \frac{1}{< w, t_1 - t_0 >} \int_{<w,t_0>}^{<w,t_1>} g(t)\, dt.$$

Exemple : $F(u) =< w, u >^k$, pour $u \in \mathbb{R}^2$. Ceci correspond à $g(t) = t^k$ et la formule précédente nous donne

$$[t_0, t_1]F = \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k} < w, t_1 >^i < w, t_o >^{k-i} .$$

Exemple : Pour une fonction polynômiale F de degré 3, on peut appliquer la formule de la quadrature de Simpson pour calculer la moyenne. On aboutit à :

$$[t_0, t_1]F = \frac{1}{6}\Big(F(t_0) + 4F(\frac{t_0 + t_1}{2}) + F(t_1)\Big).$$

A partir de la formule de récurrence pour les splines simpliciales on peut obtenir des formules de récurrence pour les différences divisées.

Théorème 3.12 *Soit* $h_p = \sum_{i=0}^{n} \mu_i\, t_i$, *avec* $\sum_{i=0}^{n} \mu_i = 0$. *Alors*

$$[K]_p\varphi(\cdot)h_1 \ldots h_p = (-1)\frac{n}{p} \sum_{i=0}^{n} \mu_i\, [K_i]_{p-1}\varphi(\cdot)h_1 \ldots h_{p-1} .$$

Démonstration : D'après (3.10), on a

$$\begin{aligned}[K]_p\varphi(\cdot)h_1 \ldots h_p &= \frac{1}{p!}(M(\cdot|K), D^p\varphi(\cdot)h_1 \ldots h_p)\\ &= \frac{-1}{p!}(DM(\cdot|K)h_p, D^{p-1}\varphi(\cdot)h_1 \ldots h_{p-1})\\ &= \frac{(-1)n}{p!} \sum_{i=0}^{n} \mu_i(M(\cdot|K_i), \varphi(\cdot)h_1 \ldots h_{p-1}). \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Cette formule redonne la formule de récurrence classique pour les différences divisées à une variable. Prenons tous les h_i égaux à 1, $i = 1, \ldots, p$.

Dans ce cas, les conditions $h_p(=1) = \mu_0\, t_0 + \mu_1\, t_1$ et $\mu_0 + \mu_1 = 0$ ont pour unique solution :

$$\mu_0 = \frac{-1}{t_n - t_0} \quad \text{et} \quad \mu_1 = \frac{1}{t_n - t_0}.$$

En utilisant le théorème précédent, il en résulte que

$$[t_0, \ldots, t_n]_p \varphi = \frac{n}{p}(-1)\Big\{\frac{-1}{t_n - t_0}[t_1, \ldots, t_n]_{p-1}\varphi + \frac{1}{t_n - t_0}[t_0, \ldots, t_{n-1}]_{p-1}\varphi\Big\}.$$

Puisque, pour $s = 1$, on a $p = n$, cette formule devient

$$[t_0, \ldots, t_n]_n \varphi = \frac{[t_1, \ldots, t_n]_{p-1}\varphi - [t_0, \ldots, t_{n-1}]_{p-1}\varphi}{t_n - t_1}.$$

Par applications successives du théorème, on arrive finalement à écrire la différence divisée d'ordre p comme une combinaison linéaire de différences divisées d'ordre 0. Si on note $K_I = \{t_i \in K \mid i \in I\}$, le théorème suivant nous montre que les différences divisées d'ordre zéro de la forme $[K_I]_0$, pour tout $I \subseteq \{0, \ldots, n\}$ avec $|I| = s$, sont linéairement indépendantes.

Théorème 3.13 *Soient $K \subset \mathbb{R}^s$, $h_1, \ldots, h_p \in \mathbb{R}^s$ donnés; alors il existe des coefficients $\eta_I \in \mathbb{R}$, $|I| = s$, uniques, tels que*

$$[K]_p \varphi(\cdot) h_1 \ldots h_p = \sum_{|I|=s} \eta_I\, [K_I]_0 \varphi \qquad \forall \varphi \in C^p(\mathbb{R}^s).$$

Plus précisément les η_I sont donnés par :

$$\eta_I = (-1)^p \binom{n}{p} \frac{\prod_{i=1}^{p} det \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ h_i & t_{i_1} & \cdots & t_{i_s} \end{pmatrix}}{\prod_{j \notin I} det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ t_j & t_{i_1} & \cdots & t_{i_s} \end{pmatrix}},$$

où $I = \{i_1, \ldots, i_s\}$.

Remarque : L'existence des η_I découle du théorème 3.12. Il y a au moins un choix de $\eta_I \in \mathbb{R}$ tel que

$$[K]_p \varphi\, h_1 \ldots h_p = \sum_{|I|=s} \eta_I\, [K_I]_0\, \varphi \qquad \forall \varphi \in C^p.$$

Avant de prouver ce théorème, on aura besoin d'un résultat dû à Dahmen-Micchelli [2], sur un schéma d'interpolation de type Lagrange sur $\mathbb{R}^s$.

Supposons que $K = \{t_0, \ldots, t_n\} \subset \mathbb{R}^s$ soit en position générale. Ceci veut dire que tout sous-ensemble formé par $s+1$ points est affinement indépendant. On peut, dans ce cas, trouver un point $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^s$, de sorte que $K \cup \{\mathcal{O}\}$ soit encore en position générale.

Pour un ensemble $I = \{i_1, \ldots, i_s\}$ de s indices, notons $\ell_I(u)$ la fonction affine déterminée par les conditions

$$\ell_I(\mathcal{O}) = 1, \qquad \ell_I(t_i) = 0, \quad \forall i \in I.$$

Cette fonction affine peut être écrite comme :

$$\ell_I(u) = 1 + < w_I, u - \mathcal{O} >$$

pour un $w_I \in \mathbb{R}^s$ unique. Définissons alors

$$Q_I(u) := \prod_{j \notin I} \frac{1 + < u, t_j - \mathcal{O} >}{\ell_I(t_j)} \ .$$

C'est un polynôme de degré $k+1$ qui vérifie

$$Q_I(w_J) = \delta_{IJ} = \begin{cases} 1 & \text{si } \ I = J, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Observons d'abord que $\ell_I(t_j) \neq 0, \forall j \notin I$, à cause de l'hypothèse $K \cup \{\mathcal{O}\}$ affinement indépendant.

Pour $J = I$, on a

$$\begin{aligned} Q_I(w_I) &= \prod_{j \notin I} \frac{1 + < w_I, t_j - \mathcal{O} >}{\ell_I(t_j)} \\ &= \prod_{j \notin I} \frac{\ell_I(t_j)}{\ell_I(t_j)} = 1. \end{aligned}$$

Considérons maintenant le cas où $J \neq I$. Si $\tilde{\jmath} \in J$ est tel que $\tilde{\jmath} \notin I$, $Q_I(w_J)$ contient alors le facteur

$$1 + < w_J, t_{\tilde{\jmath}} - \mathcal{O} >= \ell_J(t_{\tilde{\jmath}}),$$

qui vaut zéro par construction.

Il est alors clair que $\{Q_I(\cdot) \mid |I| = s\}$ est un ensemble linéairement indépendant de $\begin{pmatrix} k+s+1 \\ s \end{pmatrix}$ polynômes de degré $k+1$. C'est donc une base de $\mathcal{P}_{k+1}(\mathbb{R}^s)$. Plus précisément, on a le résultat :

Théorème 3.14 *$\forall P \in \mathcal{P}_{k+1}(\mathbb{R}^s)$, on a la représentation*

$$P(u) = \sum_{|I|=s} P(w_I)\, Q_I(u).$$

Pour simplifier les expressions, on supposera dans la suite que $\mathcal{O} = (0, \ldots, 0)$. Il suffit de définir un nouveau repère avec $\mathcal{O}$ comme origine. Le schéma d'interpolation devient alors :

- w_I est la solution du système linéaire
$$1+ < w_I, t_i >= 0 \quad \forall i \in I,$$
- $Q_I(u) = \prod_{j \notin I} \left(\dfrac{1+ < u, t_j >}{1+ < w_I, t_j >} \right),$
- $1+ < w_I, u >= \dfrac{det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ u & t_{i_1} & \cdots & t_{i_s} \end{pmatrix}}{det(t_{i_1}, \ldots, t_{i_s})},$

  d'où $\quad < w_I, u >= \dfrac{det \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ u & t_{i_1} & \cdots & t_{i_s} \end{pmatrix}}{det(t_{i_1}, \ldots, t_{i_s})}$.

En particulier, pour $P(u) = \prod_{i=1}^{p} < u, h_i >$, on obtient la représentation suivante :

$$P(u) = \sum_{|I|=s} \frac{\prod_{i=1}^{p} det \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ h_i & t_{i_1} & \cdots & t_{i_s} \end{pmatrix}}{\prod_{j \notin I} det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ t_j & t_{i_1} & \cdots & t_{i_s} \end{pmatrix}} \prod_{j \notin I} (1+ < u, t_j >). \tag{3.15}$$

Démonstration : (du théorème 3.13)

On sait qu'il existe des $\eta_I \in \mathbb{R}$ tels que

$$[K]_p \varphi \, h_1 \ldots h_p = \sum_{|I|=s} \eta_I \, [K_I]_0 \, \varphi \qquad \forall \varphi \in C^p.$$

Ceci est équivalent à

$$\frac{1}{p!} \Big(M(\cdot|K), D^p \varphi \, h_1 \ldots h_p \Big) = \sum_{|I|=s} \eta_I \, \Big(M(\cdot|K_I), \varphi \Big). \tag{3.16}$$

En particulier, pour $\varphi(u) = g^{(s-1)}(< w, u >)$, avec $g(t) := 1/(1+t)$, c'est-à-dire :

$$\varphi(u) = \frac{(-1)^{s-1}(s-1)!}{(1+ < w, u >)^s} \ ,$$

on obtient :

$$D^p \varphi(u) \, h_1 \ldots h_p = \frac{(-1)^n n!}{(1+ < w, u >)^s} \prod_{i=1}^{p} < w, h_i > .$$

Le théorème 3.14 appliqué à 3.16 prouve que :

$$\frac{n!}{p!}(-1)^n \frac{\prod_{i=1}^n < w, h_i >}{\prod_{j=1}^n (1+ < w, t_j >)} = \sum_{|I|=s} \eta_I \frac{(-1)^{s-1}(s-1)!}{\prod_{j\in I}(1+ < w, t_j >)} ,$$

soit encore

$$\prod_{i=1}^p < w, h_i >= \sum_{|I|=s} \eta_I \frac{(-1)^p}{C_p^n} \prod_{j\notin I}(1+ < w, t_j >).$$

D'après 3.15, les coefficients de la somme de droite sont uniques. Par identification, on obtient finalement :

$$\eta_I = C_p^n \frac{\prod_{i=1}^p det \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ h_i & t_{i_1} & \cdots & t_{i_s} \end{pmatrix}}{\prod_{j\notin I} det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ t_j & t_{i_1} & \cdots & t_{i_s} \end{pmatrix}} . \qquad \blacksquare$$

Remarque : Ce théorème permet d'étendre notre définition des différences divisées au cas de fonctions qui ne sont pas nécessairement C^k. Puisque la différence divisée d'ordre k s'exprime comme combinaison linéaire de différences divisées d'ordre zéro et que celles-ci sont des moyennes sur des $(s-1)$-simplexes de la fonction, il suffira par exemple que la fonction soit continue.

3.3 Quelques applications

3.3.1 *Etude de la discontinuité de la dérivée k-ième d'une spline simpliciale*

On sait que, si $K = \{t_0, \dots, t_n\}$ est en position générale, la spline simpliciale $M(\cdot|K)$ est de classe C^{k-1}. On fera cette supposition pour étudier la dérivée k-ième de $M(\cdot|K)$.

Le théorème 2.25 exprime la spline simpliciale comme combinaison linéaire de splines coniques. Il est clair que les sauts de la dérivée k-ième de ces splines coniques sont constants tout au long des ensembles de la forme

$$T_{i,I} := \{u = t_i + \sum_{j\in I} \lambda_j \, \varepsilon_{ij} \, (t_i - t_j) \mid \lambda_j \geq 0, \ \forall j \in I\},$$

où les ensembles I vérifient $I \subseteq \{0, \dots, n\} \setminus \{i\}$ et $|I| = s-1$. Ceci provient du fait que la spline conique est formée de morceaux de polynômes de degré k à l'intérieur de cônes polyédriques limités par ces ensembles.

En particulier, les sauts de la dérivée k-ième de la spline simpliciale sont constants le long d'ensembles de la forme

$$F_I = co(K_I), \qquad \text{avec } |I| = s.$$

Figure 3.17 : Le saut de la dérivée k-ième est constant le long de $[t_i, t_j]$.

Pour $s = 2$, le saut de la dérivée k-ième sera constant tout au long des segments $[t_i, t_j]$. Ceci n'est guère évident, puisque (voir Fig. 3.17) le segment $[t_i, t_j]$ limite des régions où la spline est représentée par des polynômes différents.

H. Hakopian [3] a trouvé une expression pour la valeur du saut. On retrouvera ici cette même expression, à partir du théorème 3.13.

Pour chaque $I \subseteq \{0, \ldots, n\}$, $|I| = s$, soit $H_I = \operatorname{Aff} K_I$, et choisissons n_I, vecteur normal à K_I. Ceci fixe une orientation pour l'hyperplan

$$H_I = \{u \mid\ < n_I, u >= \alpha_I\}.$$

On peut alors définir

$$\begin{aligned} H_I^+ &= \{u \mid\ < n_I, u >> \alpha_I\}, \\ H_I^- &= \{u \mid\ < n_I, u >< \alpha_I\}. \end{aligned}$$

Les hyperplans H_I produisent une partition sur $[K]$ qu'on notera $\{E_l\}_l$. Chaque E_l sera un polytope convexe ayant ses faces contenues dans les différents H_I.

Définition 3.18 *Le saut de la dérivée k-ième, qui dépend seulement du H_I traversé et de son orientation (et non des region E_l particulières), sera noté*

$$\Delta_I := D^k M(u|K)(h_1 \ldots h_k)\Big|_{H_I^+ \cap [K]} - D^k M(u|K)(h_1 \ldots h_k)\Big|_{H_I^- \cap [K]}.$$

Remarque : En fait, Δ_I dépend aussi des directions de dérivation $h_1 \ldots h_k$. Mais ceci ne sera pas indiqué pour ne pas alourdir la notation. On tiendra compte du contexte.

Théorème 3.19

$$\Delta_I = \varepsilon_I \, \frac{n!}{(k+1)!} \frac{\prod_{i=1}^{k} \, det \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ h_i & t_{i_1} & \cdots & t_{i_s} \end{pmatrix}}{\prod_{j \notin I} \, det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ t_j & t_{i_1} & \cdots & t_{i_s} \end{pmatrix}} \, ,$$

où $\varepsilon_I \in \{+1, -1\}$ *est déterminé par*

$$\varepsilon_I = sgn \; det \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ n_I & t_{i_1} & \cdots & t_{i_s} \end{pmatrix}.$$

Démonstration : Soit $\varphi \in C^{k+1}$, $(k+1 = p)$. On sait que

$$[K]_p \varphi(h_1 \dots h_p) = \frac{1}{(k+1)!} \int_{\mathbb{R}^s} D^{k+1}\varphi(u)(h_1 \dots h_p) \, M(u|K) \, du.$$

En effectuant k intégrations par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}
[K]_p \varphi(h_1 \dots h_p) &= \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \int_{\mathbb{R}^s} D\varphi(u) h_{k+1} \, D^k M(u|K)(h_1 \dots h_k) \, du \\
&= \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \sum_l D^k M(u|K)(h_1 \dots h_k) \int_{E_l} D\varphi(u) \, h_{k+1} \, du \\
&= \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \sum_l D^k M(u|K)(h_1 \dots h_k) \\
&\qquad\qquad \times \int_{\partial E_l} \varphi(u) < h_{k+1}, n > \, dS.
\end{aligned}$$

On peut regrouper les morceaux des bords ∂E_l qui sont sur un même $[K_I]$. Comme la normale extérieure des régions du côté de H_I^+ est $-n_I$, on a

$$\begin{aligned}
[K]_p \varphi(h_1 \dots h_p) &= \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \sum_{|I|=s} (-\Delta_I) \; < h_{k+1}, n_I > \int_{[K_I]} \varphi \\
&= \sum_{|I|=s} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} \Delta_I \; < h_{k+1}, n_I > \, Vol_{s-1}[K_I] \; [K_I]_0 \varphi.
\end{aligned}$$

On peut identifier les termes avec la somme du théorème 3.13 et obtenir

$$\Delta_I = \varepsilon_I \, n! \, \frac{\prod_{i=1}^{k} \, det \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ h_i & t_{i_1} & \cdots & t_{i_s} \end{pmatrix}}{\prod_{j \notin I} \, det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ t_j & t_{i_1} & \cdots & t_{i_s} \end{pmatrix}} \, ,$$

avec

$$\varepsilon_I = \frac{det \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ h_{k+1} & t_{i_1} & \cdots & t_{i_s} \end{pmatrix}}{(s-1)! < h_{k+1}, n_I > Vol_{s-1}[K_I]} \; .$$

Il est clair que η_I ne peut pas dépendre de h_{k+1}. On peut prendre en particulier $h_{k+1} = n_I$, d'où :

$$\varepsilon_I = \frac{1}{(s-1)!\, Vol_{s-1}[K_I]} \; det \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ n_I & t_{i_1} & \cdots & t_{i_s} \end{pmatrix}.$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \left| det \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ n_I & t_{i_1} & \cdots & t_{i_s} \end{pmatrix} \right| &= \left| det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ t_{i_1} + n_I & t_{i_1} & \cdots & t_{i_s} \end{pmatrix} \right| \\ &= s!\, Vol_s[t_{i_1} + n_I, t_{i_1}, \ldots, , t_{i_s}] \\ &= s!\, \frac{1}{s} \cdot 1 \cdot Vol_{s-1}[t_{i_1}, \ldots, , t_{i_s}]. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \varepsilon_I &= \pm 1 \\ &= sgn\, det \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ n_I & t_{i_1} & \cdots & t_{i_s} \end{pmatrix}. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Remarque : Une autre expression pour ε_I est :

$$\varepsilon_I = -sgn\, det(n_I, t_{i_2} - t_{i_1}, \ldots, t_{i_s} - t_{i_1}).$$

Remarque : Puisque dans l'expression du saut Δ_I on trouve, au dénominateur, le déterminant

$$det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ t_j & t_{i_1} & \cdots & t_{i_s} \end{pmatrix},$$

le saut dépend inversement des volumes des s-simplexes ayant $[K_I]$ pour base et t_j pour sommet. En plus, si un de ces t_j tend vers l'hyperplan H_I, K ne sera plus en position générale et le saut deviendra infini.

Exemple : Pour une spline quadratique sur $\mathbb{R}^2$, avec $K = \{t_0, t_1, t_2, t_3, t_4\}$ en position générale, le saut de la dérivée seconde selon la normale au segment $[t_0, t_1]$ est donné par

$$|\Delta| = \frac{4}{L \cdot h_2 h_3 h_4} \; ,$$

où $L =$ longueur de $[t_0, t_1]$ et h_i représente la distance du nœud t_i à la droite qui passe par t_0 et t_1.

3.3.2 *Interpolation de Lagrange généralisée.*

On peut généraliser l'interpolation de Lagrange en remplaçant les évaluations ponctuelles par des différences divisées d'ordre zéro (voir Hakopian [3]). Considérons le problème suivant :

étant donné F de classe C^p et $K = \{t_0, \ldots, t_n\}$, trouver $P \in \mathcal{P}_{k+1}(\mathbb{R}^s)$ tel que

$$[K_I]_0 P = [K_I]_0 F \qquad \forall I, \quad |I| = s. \tag{L}$$

Remarque : Pour $s = 1$, il s'agit du problème classique de Lagrange. De plus, pour s quelconque, si P est solution de (L), P vérifie aussi

$$[K_I]_q P = [K_I]_q F \qquad \forall I, \quad |I| = s + q,\ q = 0, \ldots, k.$$

Théorème 3.20 *(L) admet une solution unique.*

Démonstration : Soit $\Lambda\ :\ \mathcal{P}_{k+1}(\mathbb{R}^s) \longrightarrow \mathbb{R}^d$, $d = \binom{n+k+1}{s}$, l'application linéaire définie par

$$\Lambda\, P := \Big([K_I]_0\Big)_{|I|=s}.$$

Puisque $dim \mathcal{P}_{k+1}(\mathbb{R}^s) = d$, il suffit de vérifier que Λ est injective, c'est-à-dire que $\Lambda\, P = 0 \Rightarrow P = 0$.

Soit alors $P \in \mathcal{P}_{k+1}(\mathbb{R}^s)$ tel que

$$[K_I]_0 = 0 \qquad \forall I,\ |I| = s.$$

Selon le théorème 3.13, on a

$$[K]_{k+1} P\, h_1 \ldots h_{k+1} = 0.$$

Mais, selon la définition

$$\begin{aligned}[K]_{k+1} P\, h_1 \ldots h_{k+1} &= \frac{1}{(k+1)!} \int_{\mathbb{R}^s} D^{k+1} P(u)\, h_1 \ldots h_{k+1}\, M(u|K)\, du \\ &= \frac{1}{(k+1)!}\, D^{k+1} P(u)\, h_1 \ldots h_{k+1},\end{aligned}$$

ce qui entraîne que $P \in \mathcal{P}_k(\mathbb{R}^s)$. Par récurrence, on obtient finalement que F est une constante, donc nulle. ■

3.3.3 *La spline simpliciale comme différence divisée*

Le lemme suivant se démontre directement.

Lemme 3.21

$$D^n C(\cdot|Y)\, y_1 \ldots y_n = \delta.$$

Il nous permet d'énoncer :

Théorème 3.22

$$(k+1)!\,[K]_{k+1}\, C(u-v_0|t_0,\ldots,t_k)\, t_0 \ldots t_k = M(v_0|K).$$

Démonstration : On peut écrire "formellement" :

$$\begin{aligned}
&(k+1)!\,[K]_{k+1}\, C(u-v_0|t_0,\ldots,t_k)\, t_0 \ldots t_k \\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}^s} M(u|K)\, D^k C(u-v_0|t_0,\ldots,t_k)\, t_0 \ldots t_k\, du \\
&\qquad = (M(u|K), \delta_{\cdot - v_0}) \\
&\qquad = M(v_0|K). \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Remarque : Dans le cas d'une variable, on retrouve la formule classique

$$\begin{aligned}
M(v_0|K) &= n!\,[K]_n C(u-v_0|t_0,\ldots,t_{n-1})\, t_0,\ldots,t_{n-1} \\
&= n!\,\prod_{i=0}^{n-1} t_i\,[K]_n C(u-v_0|t_0,\ldots,t_{n-1})\, 1,\ldots,1 \\
&= n!\,\prod_{i=0}^{n-1} t_i\,[K]_n \left[\frac{(\cdot - v_0)_+^{n-1}}{(n-1)!\prod_{i=0}^{n-1} t_i}\right] 1,\ldots,1 \\
&= n\,[K]_n\,(\cdot - v_0)_+^{n-1}\, 1,\ldots,1.
\end{aligned}$$

3.4 Un algorithme d'évaluation

On propose ici une méthode pour l'évaluation d'une spline simpliciale de degré k le long d'une droite quelconque

$$L := \{w + x\,\vec{v} \mid x \in \mathbb{R}\},$$

où w est un point de $\mathbb{R}^s$ et $\vec{v}$ est une direction arbitraire. La restriction de la spline simpliciale à cette droite correspond à un polynôme par morceaux de degré k et de classe C^{k-1}. Les discontinuités de la dérivée k-ième de ce polynôme par morceaux se produiront exactement aux intersections de L avec les $(s-1)$-simplexes de la forme $[K_I]$, $|I| = s$. En utilisant le théorème 3.19, il est possible de calculer les sauts de la dérivée k-ième en chacune de ces intersections et le calcul de la spline le long de L devient possible.

On va détailler ces idées dans le cas $s = 2$ et comparer ensuite cette façon de procéder avec les méthodes présentées dans la section 2.5.

Puisqu'on est intéressé au calcul du saut de la dérivée k-ième de la restriction de la spline à la droite L, on doit prendre les directions h_i égales à $\vec{v}$. Pour fixer les idées, soit

$$F(x) := M(w + x\,\vec{v}|K) \quad x \in \mathbb{R},$$

et soit $\tilde{u} = w + \tilde{x}\,\vec{v}$ l'intersection de L avec la ligne de nœuds $[t_i, t_j]$. En exprimant la dérivée k-ième de F en fonction de celle de $M(\cdot|K)$, on obtient

$$F^{(k)}(\tilde{x}_+) - F^{(k)}(\tilde{x}_-) = \varepsilon\,(k+2)\,\frac{det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \vec{v} & t_i & t_j \end{pmatrix}^k}{\prod_{l\neq i,j} det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t_l & t_i & t_j \end{pmatrix}}\,, \tag{3.23}$$

où

$$\varepsilon = sgn\Big(det(\vec{v}, t_i - t_j)\Big).$$

Le calcul des intersections de L avec les lignes de nœuds, bien qu'élémentaire, doit être fait au coût minimal sans sacrifier la précision. Nous proposons ci-après une façon simple et efficace de le faire.

Soit $\vec{n}$ un vecteur orthogonal à $\vec{v}$, par exemple $\vec{n} = ((\vec{v})_2, -(\vec{v})_1)$. On utilise la notation $(P)_i$ pour indiquer la i-ième composante de $P \in \mathbb{R}^2$. La droite L peut s'écrire alors comme

$$L = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid \; <\vec{n}\,,\, u - w> = 0\}.$$

Pour savoir alors si L coupe un segment $[t_i, t_j]$ il suffit de calculer les quantités

$$\alpha_i := <\vec{n}\,,\, t_i - w> \quad \text{et} \quad \alpha_j := <\vec{n}\,,\, t_j - w>\,.$$

Différents cas peuvent se produire :

1. Si α_i et α_j sont non nuls et de même signe, aucune intersection ne se produira.
2. Si α_i et α_j sont non nuls et de signes opposés alors une unique intersection se produit à l'intérieur du segment.
3. Si $\alpha_i = \alpha_j = 0$, le segment se trouve confondu avec la droite L, et le saut est nul.
4. Si $\alpha_i = 0$ (resp. $\alpha_j = 0$) et $\alpha_j \neq 0$ (resp $\alpha_i \neq 0$), l'intersection se produit sur le nœud t_i (resp. t_j). Dans ce cas, on comptera une intersection

seulement si $\alpha_j > 0$ (resp. $\alpha_i > 0$). On fait cela parce qu'on a choisi de perturber la position de la droite L dans la direction de $+\vec{n}$ quand l'intersection se produit exactement sur un nœud.

C'est seulement dans le deuxième cas qu'il faut effectivement calculer l'intersection. L'intersection peut alors s'écrire comme $\tilde{u} = \tilde{\lambda}\, t_i + (1 - \tilde{\lambda})\, t_j$ avec $\tilde{\lambda}$ donné par :

$$\tilde{\lambda} = \frac{\alpha_j}{\alpha_j - \alpha_i}.$$

Finalement, à partir de l'intersection $\tilde{u}$, on doit trouver $\tilde{x}$ tel que $\tilde{u} = w + \tilde{x}\,\vec{v}$. Soit $(\vec{v})_i$ la composante de $\vec{v}$ de plus grande valeur absolue; alors :

$$\tilde{x} = \frac{(\tilde{u})_i - (w)_i}{(\vec{v})_i}\ .$$

Avec ces procédures, on obtient une liste de réels

$$x_1, x_2, \ldots, x_N$$

correspondant aux intersections avec les lignes de nœuds, qu'on supposera ordonnée. Pour chacun des x_i, on supposera déjà calculé le saut s_i de la dérivée k-ième par (3.23). Pour éviter les faux nœuds multiples, si x_i et x_{i+1} sont suffisamment proches, on les remplacera par un seul x_i, et le saut associé sera la somme des deux sauts, $s_i + s_{i+1}$.

Le calcul pourrait se faire maintenant à partir de l'expression

$$F(x) = \sum_{i=1}^{N} s_i\, \frac{(x - x_i)_+^k}{k!}\ .$$

On sait néanmoins que cette façon de procéder est instable. On cherchera donc à représenter F dans la base des B-splines,

$$F(x) = \sum_{i=1}^{N-k-1} p_i\, \mathcal{N}_i(x),$$

où $\mathcal{N}_i(\cdot)$ représente la B-spline basée sur les nœuds $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k+1}$ (voir (2.7), section 2.1). Pour exprimer les coefficients p_i à partir des sauts s_i, on calcule le saut de la dérivée k-ième de $\mathcal{N}_i(\cdot)$ au point x_j,

$$\begin{aligned}\delta_{i\ j} &= \mathcal{N}_i^{(k)}(x_{j\ +}) - \mathcal{N}_i^{(k)}(x_{j\ -}) \\ &= \frac{1}{x_{i+k+1}} \Big(\prod_{\substack{l=i \\ l\neq j}}^{i+k+1} (x_l - x_j) \Big)^{-1}.\end{aligned}$$

En additionnant tous les sauts des B-splines présentes en un point x_j, on doit retrouver le saut de la spline F. Ceci nous donne le système triangulaire suivant :

$$
\begin{aligned}
s_1 &= p_1 \delta_{1\,1} \\
s_2 &= p_1 \delta_{1\,2} + p_2 \delta_{2\,2} \\
&\vdots \\
s_{k+1} &= p_1 \delta_{1\,k+1} + \cdots + p_{k+1} \delta_{k+1\,k+1} \\
s_l &= \sum_{i=l-k}^{l} \delta_{l\,i} p_i \quad \text{pour} \quad l = k+2, \ldots, N-k-1.
\end{aligned}
$$

Le cas quadratique, correspondant à $k = 2$, a été testé dans quelques exemples (cf fig 3.24 et 3.25). Le calcul final de la spline quadratique à une variable a utilisé une méthode de subdivision. Dans chaque cas on présente la configuration des nœuds $K = \{t_0, t_1, t_2, t_3, t_4\}$ et le tracé de la spline simpliciale selon des droites parallèles aux axes. Dans le cas d'une configuration qui n'est pas en position générale, la méthode produit des divisions par zéro (voir (3.23)), et n'est donc pas directement applicable. Dans ce cas, les résultats ont été obtenus en perturbant légèrement les positions des points en conflit. Ceci montre au moins que la méthode est assez robuste en présence d'une quasi-colinéarité de trois nœuds ou plus.

Etudions finalement le coût des calculs associés à cette méthode. On doit considérer d'abord que pour une direction $\vec{v}$ arbitraire, les sauts de la dérivée k-ième le long de chaque ligne de nœuds peut être pré-calculé. Ensuite, une fois choisie une droite L, ou encore, une fois fixé le point w, les intersections avec les lignes de nœuds devront être calculées une seule fois. Donc, pour tous les points $u \in L$, le calcul revient à calculer une spline de degré k à une variable. On peut dire alors que le coût se réduit à $(1/2)k(k+1)$, si on utilise l'algorithme de De Boor. Donc, en supposant que les calculs doivent être faits tout au long d'une droite, la compléxité des calculs de la méthode est $o(k^2)$, ce qui est plus performant que les méthodes étudiées dans la section 2.5.

Figure 3.24 a, b : Exemples de splines simpliciales quadratiques.

Figure 3.24 c, d : Exemples de splines simpliciales quadratiques.

Références

1. Cavaretta A.S., Micchelli C.A. et Sharma A., *Multivariate interpolation and the Radon transform*, *Math. Z.*, 174, (1980), pages 263–279.
2. Dahmen W., Micchelli C.A., *On the limits of multivariate B-splines*, *J. Analyse Math.*, 39, (1981), pages 256–278.
3. Hakopian H. *Multivariate divided differences and multivariate interpolation of Lagrange and Hermite type*, *J. Approx. Th.*, 34, (1982), pages 286–305.
4. Hakopian H. *Multivariate spline functions, B-spline basis and polynomial interpolations*, *SIAM J. Numer. Anal.*, 19, (1982), pages 510–517.
5. Höllig K., Micchelli C.A. *Divided differences, hyperbolic equations, and lifting distributions.*, *Constr. Approx.*, 3, (1987), pages 143–156.
6. Neamtu M., *Simplex Splines*, Thèse U. de Twente, The Nederlands, (1992).

Chapitre 4. B-Splines et Floraisons

Un des liens les plus remarquables entre les B-splines et les floraisons est celui contenu dans la formule proposée par L. Ramshaw [5], qui donne une expression explicite des coefficients dans la base des B-splines, d'une fonction polynômiale par morceaux.

Plus précisément, soit S une fonction polynômiale par morceaux sur une partition de $\mathbb{R}$ définie par les nœuds $\{t_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, telle que sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, $S \equiv F_i$, polynôme de degré k et telle que globalement S soit de classe C^{k-1}. Si on note f_i la floraison de F_i et B_i la B-spline (à une variable) basée sur les $k+2$ nœuds consécutifs $t_i, t_{i+1}, \ldots, t_{i+k+1}$, alors

$$S(u) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} f_i(t_{i+1}, \ldots, t_{i+k})\, B_i(u). \tag{4.1}$$

Dans ce chapitre on va présenter une expression qui ressemble à (4.1), mais qui est valable dans le cas s-dimensionnel. Le schéma de construction d'une base de B-spline qu'on utilisera est dû à Dahmen-Micchelli-Seidel [2]. Pour cela, la notion de B-patch introduite au chapitre 1 est fondamentale.

La section 4.1 présente un résultat de raccordement de polynômes qui utilise d'une façon fondamentale les floraisons. Ce résultat, qui est intéressant en lui même, va nous permettre de retrouver (section 4.2) celui de Seidel d'une façon directe pour le cas de multiplicité 1 (voir aussi [4]). Ceci permet d'éclairer les propriétés en jeu pour produire le résultat.

Une deuxième conséquence de notre résultat de raccordement est présentée dans la section 4.3. Cette fois, on montre que la disparition de certaines lignes de nœuds dépend de quelques relations affines que les pôles doivent vérifier.

Finalement, la section 4.4 présente le résultat de Seidel ([7]), qui étend au cas de fonctions polynômiales par morceaux celui de Dahmen-Micchelli-Seidel ([2]), qui traite le cas d'une fonction polynômiale. Ce résultat est aussi traité dans (Phong-Seidel, [3]) et dans (Seidel, [6]). La démonstration développée, inspirée directement des références, essaye néanmoins de détailler les arguments de façon plus complète et de préciser le rôle de chaque hypothèse.

C'est la dernière référence (Seidel [6]) qui a été en réalité notre point de départ. Notre but initial a été de bien comprendre ce résultat. Dans un deuxième temps, nous avons été amené à étudier en profondeur les splines simpliciales ainsi que les floraisons.

4.1 Un résultat de raccordement.

Comme dans la section 1.3, supposons qu'on fixe un s-simplexe $[X] \subset \mathbb{R}^s$, où $X = \{x_0, \dots, x_s\}$. Supposons, comme avant, qu'on associe à chaque sommet $x_{i,0} := x_i$ de $[X]$ un nuage de k nœuds additionnels

$$x_{i,1}, \dots, x_{i,k}.$$

Dans tout le chapitre on fera l'hypothèse (comparer avec (1.23))

$$\Omega_k := int(\bigcap_{|\beta| \leq k} \Delta_\beta) \neq \emptyset. \tag{4.2}$$

Rappelons que $\Delta_\beta = [x_{0,\beta_0}, \dots, x_{s,\beta_s}]$.

Fixons une face de $[X]$, disons $[X_{i_0}]$, et notons

$$a_\beta(\cdot) := \lambda_{\beta,i_0}(\cdot).$$

On sait que a_β est l'unique fonction affine qui vérifie :

$$a_\beta(x_{j,\beta_j}) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i_0 \ , \\ 0 & \text{sinon } \ . \end{cases}$$

Définissons

$$\begin{aligned} L_\beta &= \{u \mid a_\beta(u) = 0\}, \\ L_\beta^+ &= \{u \mid a_\beta(u) > 0\}, \\ L_\beta^- &= \{u \mid a_\beta(u) < 0\}. \end{aligned}$$

L'ensemble L_β est l'hyperplan affine engendré par les points x_{j,β_j}, $j \neq i_0$. Donc L_β contient la face de Δ_β opposée à $x_{i_0,\beta_{i_0}}$. On remarque que le nombre d'hyperplans L_β est $\begin{pmatrix} s+k \\ k \end{pmatrix} =: d_k$.

L'hypothèse (4.2) implique que l'ensemble

$$\mathcal{D}^+ := \bigcap_{|\beta|=k} L_\beta^+$$

est non vide.

Soit L la droite générée par un point $w \in \Omega_k$ quelconque et x_{i_0}. Pour chaque β, $w \in L_\beta^+$. Considérons $\tilde{\beta} = (\beta_0, \dots, 0, \dots, \beta_s)$ où le zéro occupe la position i_0. Les fonctions affines a_β et $\lambda_{\tilde{\beta},i_0}$ sont nulles sur l'hyperplan L_β, donc proportionnelles. En plus, les deux sont positives sur w, donc de même signe partout. Puisque $w \in \Omega \subseteq \Delta_{\tilde{\beta}}$ on a nécessairement $a_\beta(x_{i_0}) < a_\beta(w)$. Ceci entraîne que $L \cap L_\beta^- \neq \emptyset$. Ceci étant vrai pour toute droite parallèle à L, on obtient que

$$\mathcal{D}^- := \bigcap_{|\beta|=k} L_\beta^-$$

est non vide.

Dans cette section, on fait l'hypothèse supplémentaire

$$\textit{Les hyperplans } L_\beta \textit{ sont tous distincts.} \tag{4.3}$$

Dans ce cas, il est clairement possible de choisir une droite parallèle à L qui coupe les hyperplans L_β en d_k points distincts. Plus précisément, on peut trouver une droite L' parallèle à L et une boule $B(0,\varepsilon)$, tels que la région

$$R := L' + B(0,\varepsilon) \tag{4.4}$$

formée par toutes les droites parallèles à L se trouvant à une distance inférieure à ε de L', coupe les hyperplans L_β en d_k parties disjointes. De cette façon, le "cylindre" R est partitionné en d_k+1 régions disjointes, séparées par les L_β, les deux régions extrêmes étant $\mathcal{D}^-$ et $\mathcal{D}^+$ respectivement.

Sur $\mathbb{R}^s$, les hyperplans L_β définissent une partition qu'on notera $\mathcal{P}$. Notons $S_\mathcal{P}$ l'espace des fonctions polynômiales par morceaux sur $\mathcal{P}$, de degré k et de classe C^{k-1}. On a le résultat suivant :

Théorème 4.5 *Soient F^- and F^+, deux polynômes de degré k. Il existe une unique fonction $S \in S_\mathcal{P}$ telle que :*
- *pour $u \in \mathcal{D}^-$: $S(u) \equiv F^-(u)$,*
- *pour $u \in \mathcal{D}^+$: $S(u) \equiv F^+(u)$.*

Plus précisément, la fonction S est de la forme :

$$S(u) = F^-(u) + \sum_{|\beta|=k} \mu_\beta \left(a_\beta(u)\right)_+^k, \tag{4.6}$$

où les réels μ_β vérifient les relations :

$$\sum_{\substack{|\beta|=k \\ \beta \geq_{i_0} \gamma}} \mu_\beta \, \varphi_\beta(X_\gamma) = f(X_\gamma) \tag{4.7}$$

pour tout γ, $|\gamma| = k$ où f est la floraison de $F = F^+ - F^-$ et où

$$\varphi_\beta(u_1, \ldots, u_k) := \prod_{j=1}^{k} a_\beta(u_j)$$

est la floraison de

$$\Phi_\beta(u) := a_\beta(u)^k.$$

On utilise la notation $\beta \geq_{i_0} \gamma$ pour indiquer que $\beta_j \geq \gamma_j$, $\forall j \neq i_0$.

Démonstration :

Considérons la région R de (4.4). Dans ce domaine, si S existe, elle est nécessairement de la forme

$$S(u) = F^-(u) + \sum_{|\beta|=k} \mu_\beta \left(a_\beta(u)\right)_+^k.$$

(On rappelle que si une fonction polynômiale F vérifie $D^\alpha F(u) = 0$, $\forall u \in H = \{u \mid a(u) = 0\}$ hyperplan affine, quel que soit α, $|\alpha| \leq r$, alors $(a(u))^{r+1}$ est un facteur de F.)

Pour $u \in \mathcal{D}^-$ on a $S(u) = F^-(u)$. Mais pour $u \in \mathcal{D}^+$,

$$S(u) = \sum_{|\beta|=k} \mu_\beta \, \Phi_\beta(u).$$

Donc, si S existe, les μ_β doivent vérifier

$$\sum_{|\beta|=k} \mu_\beta \, \Phi_\beta(u) = F(u)$$

ou encore, en utilisant les d_k fonctionnelles linéairement indépendantes $\mathcal{L}_\gamma$ (voir théorème 1.24)

$$\mathcal{L}_\gamma \Bigg(\sum_{|\beta|=k} \mu_\beta \, \Phi_\beta \Bigg) = \mathcal{L}_\gamma\big(F\big) \quad \forall \gamma,\ |\gamma| = k,$$

ce qui revient à dire que les pôles sont les mêmes. Explicitement on a

$$\sum_{|\beta|=k} \mu_\beta \, \varphi_\beta(X_\gamma) = f(X_\gamma) \quad \forall \gamma,\ |\gamma| = k.$$

Sans perte de généralité, supposons que $i_0 = s$.

Puisque $\varphi_\beta(X_\gamma)$ est le produit des facteurs

$$a_\beta(x_{0,0}), \ldots, a_\beta(x_{0,\gamma_0 - 1}), \ldots, a_\beta(x_{s,0}), \ldots, a_\beta(x_{s,\gamma_s - 1}),$$

et que par construction $a_\beta(x_{j,\beta_j}) = 0$, $j = 0, \ldots, s-1$, on a

$$\varphi_\beta(X_\gamma) = 0 \ \text{ si } \beta_j < \gamma_j \ \text{ pour au moins un } j \in \{0, \ldots, s-1\}$$

ce qui prouve (4.7).

Etant donné que dans (4.7), tous les multi-indices vérifient que la somme des composantes est k, les premières s composantes sont suffisantes pour déterminer la dernière. Ainsi, l'application

$$\beta = (\beta_0, \ldots, \beta_{s-1}) \in Z_k := \{\beta \in \mathbb{Z}_+^s \mid |\beta| \leq k\} \longmapsto \hat{\beta} = (\beta_0, \ldots, \beta_{s-1}, k - |\beta|)$$

est une bijection. Alors (4.7) s'écrit

$$\sum_{\substack{\beta \in Z_k \\ \beta \geq \gamma}} \mu_{\hat{\beta}} \, \varphi_{\hat{\beta}}(X_{\hat{\gamma}}) = f(X_{\hat{\gamma}}) \quad \forall \gamma \in Z_k.$$

Il faut montrer que le système linéaire ainsi obtenu admet une solution et une seule. Pour cela, on va prouver par récurrence la propriété $Q(p)$ ci-dessous :

$Q(p)$: *Les équations* $\sum_{\substack{\beta\in Z_k\\ \beta\geq\gamma}} \mu_{\hat\beta}\, \varphi_{\hat\beta}(X_{\hat\gamma}) = f(X_{\hat\gamma})\ \ \forall\gamma\in Z_k,\ |\gamma|\geq k-p$

déterminent de façon unique les $\mu_{\hat\beta}$ *avec* $|\beta|\geq k-p$.

Pour $p=0$, les équations correspondent à des γ tels que $|\gamma|=k$, ce qui fait que les sommes sont constituées d'un seul terme, celui-ci correspondant à $\beta=\gamma$. Alors

$$\mu_{\hat\beta} = \frac{f(X_{\hat\beta})}{\varphi_{\hat\beta}(X_{\hat\beta})}.$$

Avant de continuer, vérifions que $\varphi_\beta(X_\beta)$ ne peut pas être nul.

D'après sa définition, il serait nul si $a_\beta(x_{i,l})=0$ pour i,l tels que $0\leq i\leq s$ et $l<\beta_i$.

(a) $i=s$ est impossible, puisque dans ce cas $int\ \Delta_{\tilde\beta}=\emptyset$ pour $\tilde\beta=(\beta_0,\ldots,\beta_{s-1},l)$, ce qui n'est pas possible à cause de (4.2).

(b) $i<s$ est aussi impossible. Dans ce cas, si on choisit $\tilde\beta=(\beta_0,\ldots,\beta_{i-1},l,\beta_{i+1},\ldots,m)$ où $m:=k-\sum_{j=0}^{s-1}\tilde\beta_j$, on peut vérifier que $L_\beta=L_{\tilde\beta}$, ce qui contredit (4.3).

Supposons que $Q(p)$ soit vraie et montrons $Q(p+1)$. On peut supposer que les $\mu_{\hat\beta}$ sont déjà déterminés pour $|\beta|\geq k-p$. Il faut être capable de calculer les $\mu_{\hat\beta}$ pour les β tels que $|\beta|=k-p-1$ de façon à vérifier

$$\sum_{\substack{\beta\in Z_k\\ \beta\geq\gamma}} \mu_{\hat\beta}\,\varphi_{\hat\beta}(X_{\hat\gamma}) = f(X_{\hat\gamma})\ \ \forall\gamma\in Z_k,\ |\gamma|=k-p-1.$$

Mais parmi les β tels que $\beta\geq\gamma$, le seul de taille $|\beta|=k-p-1$ est $\beta=\gamma$. Les autres vérifient nécessairement $|\beta|\geq k-p$. Ceci permet d'exprimer $\mu_{\hat\beta}$ comme

$$\mu_{\hat\gamma} = \frac{f(X_{\hat\gamma}) - \sum_{\substack{\beta\in Z_k\\ \beta\geq\gamma,\ \beta\neq\gamma}} \mu_{\hat\beta}\,\varphi_{\hat\beta}(X_{\hat\gamma})}{\varphi_{\hat\gamma}(X_{\hat\gamma})}. \tag{4.8}$$

Pour finir, on remarque que l'expression (4.8) ne dépend pas de la région R choisie. Et, puisque les intersections des hyperplans L_β constituent une union finie de variétés affines de dimension $s-2$, l'union de toutes les régions possibles R est dense dans $\mathbb{R}^s$. Un argument de continuité pour l'expression (4.6) permet d'assurer sa validité dans tout $\mathbb{R}^s$. ∎

Corollaire 4.9 *Si F^- et F^+ sont deux polynômes de degré k qui ont un contact d'ordre $k-1$ le long de l'hyperplan L_γ avec $\gamma=(0,\ldots,k)$, alors la fonction $S\in S_{\mathcal{P}}$ définie au théorème 4.5 est simplement*

$$S(u) = \begin{cases} F^-(u) & si \;\; u \in L_\gamma^- \;, \\ F^+(u) & si \;\; u \in L_\gamma^+ \;. \end{cases} \tag{4.10}$$

Ceci veut dire que la dérivée k-ième de S est continue le long des hyperplans L_β, $|\beta| = k$ sauf peut-être pour $\beta = \gamma$.
Démonstration : Si F^- et F^+ ont un contact d'ordre $k-1$ le long de L_γ, la fonction définie par (4.10) appartient clairement à $S_{\mathcal{P}}$ et doit coïncider avec l'unique fonction du théorème 4.5. ■

Remarque : Si F^- et F^+ ont un contact d'ordre $k-1$ le long de L_γ, la floraison f de $F := F^+ - F^-$ s'annule sur tout k-uplet contenant au moins un point de L_γ. Ceci veut dire que :

$$f(X_\beta) = 0 \;\; \forall \beta, \; |\beta| = k \text{ tel que } \beta_i > 0 \text{ pour au moins un } i \in \{0, \ldots, s-1\},$$

et d'après (4.8), $\mu_\gamma = 0$ pour tout γ tel que $|\gamma| = k$ et $\gamma_i > 0$ pour au moins un indice $i \in \{0, \ldots, s-1\}$. Mais le seul γ, $|\gamma| = k$, dont les s premières composantes sont nulles est $\gamma = (0, \ldots, 0, k)$.

4.2 B-Patches et B-Splines

Définissons, pour β, $|\beta| = k$, l'ensemble de nœuds

$$V_\beta := \{x_{0,0}, x_{0,1}, \ldots, x_{0,\beta_0}, \ldots, x_{s,0}, x_{s,1}, \ldots, x_{s,\beta_s}\}$$

Pour chaque sommet x_i, V_β comprend les $\beta_i + 1$ nœuds $x_{i,0}, x_{i,1}, \ldots, x_{i,\beta_i}$. Au total, V_β possède $|\beta| + s$ nœuds, donc $\#V_\beta = n := k + s$ et il y aura $\binom{n}{k}$ de tels ensembles, ce qui correspond à la dimension de $\mathcal{P}_k(\mathbb{R}^s)$, quantité qu'on notera d_k dans la suite.

On propose d'associer de cette façon à chaque β, $|\beta| = k$, une spline simpliciale basée sur V_β. La condition (4.2) assure que toutes les fonctions $M(\cdot|V_\beta)$ sont bien définies.

Remarque : Au bénéfice de la simplicité, dans le reste du chapitre on va considérer le cas $s = 2$. C'est dans ce cadre qu'on va montrer deux lemmes qui relient splines simpliciales et polynômes par morceaux.

Etant donné $K = \{x_0, \ldots, x_m\} \subset \mathbb{R}^2$ en position générale, on peut lui associer une partition du plan constituée d'un nombre fini de polygones convexes, $\mathcal{T} = \{E_l\}_l$, résultant des régions séparées par les lignes de nœuds $[x_{j_1}, x_{j_2}]$. Chacun des E_l aura ses côtés contenus dans les lignes de nœuds et ses sommets u_j seront des points soit de K, soit intersection de deux ou plus lignes de nœuds. Si $u_j \in K$, il y aura n lignes de nœuds qui arrivent à ce sommet. Par contre, si $u_j \notin K$, il y aura un nombre de lignes de nœuds strictement inférieur à n qui passent par u_j.

On notera $\mathcal{S}^k_{\mathcal{T}}$ l'espace des polynômes par morceaux sur $\mathcal{T}$ de degré k et de classe C^{k-1} dont le support est contenu dans $[K]$.

Lemme 4.11

$$\mathcal{S}^k_{\mathcal{T}} = \{0\} \quad ssi \quad m \leq k+1.$$

Démonstration : Pour $m = k+2$, la spline simpliciale $M(\cdot|K)$ est un élément non nul de $\mathcal{S}^k_{\mathcal{T}}$.

Supposons que $m = k+1$ et considérons une droite L qui ne traverse aucun des points $x_i \in K$, mais coupe $[K]$. Plus précisément, considérons un voisinage $R := L + B(0, \varepsilon)$ de cette même droite ayant la même propriété.

Il est clair que les points de K sont divisés en deux groupes. Renommons les points d'un côté de L comme $x_{0,0}, \ldots, x_{0,\beta_0}$ et ceux de l'autre côté comme $x_{1,0}, \ldots, x_{1,\beta_1}$ avec $\beta_0 + \beta_1 = k$.

La restriction d'une fonction $S \in \mathcal{S}^k_{\mathcal{T}}$ à la région R définit un polynôme par morceaux de degré k de classe C^{k-1}. Les discontinuités de la dérivée k-ième seront localisées sur les droites L_β du théorème 4.5. Si on applique ce théorème, en ajoutant des points si nécessaire, avec $F^+ \equiv F^- \equiv 0$, on conclut que $S \equiv 0$. ■

Le lemme suivant est dû à Dahmen-Micchelli [1], et précise le cas $m = k+2$. Ils démontrent le résultat pour s quelconque. Nous allons simplifier l'argumentation pour illustrer le cas $s = 2$.

Lemme 4.12 *Si $m = k+2$ alors*

$$dim\, \mathcal{S}^k_{\mathcal{T}} = 1$$

Démonstration : On doit montrer que toute fonction $S \in \mathcal{S}^k_{\mathcal{T}}$ est proportionnelle à la spline simpliciale $M(\cdot|K)$.

Notons $\mathcal{V}$ l'ensemble des sommets des polygones de $\mathcal{T}$.

Il existe un point de $\mathcal{V}$ qui est aussi sommet du polygone $[K]$. Puisqu'il appartient nécessairement à K, notons-le x_i. Soit L une droite qui sépare x_i de $[\mathcal{V} \setminus \{x_i\}]$. Cette droite coupe exactement n lignes de nœuds. Notons K_L l'ensemble de ces intersections et $M(\cdot|K_L)$ la spline à une variable définie sur L.

Puisque, à une variable, tout polynôme par morceaux de degré k, de classe C^{k-1} et ayant $k+2$ nœuds est proportionnel à la B-spline basée sur les mêmes nœuds, il existe une constante $a_L \in \mathbb{R}$ telle que

$$S(u) - a_L\, M(u|K) = 0 \qquad \forall u \in L. \tag{4.13}$$

Pour toute autre droite L', séparant x_i de $[\mathcal{V} \setminus \{x_i\}]$ on peut trouver une constante $a_{L'}$ et établir une équation similaire à (4.13), mais cette fois sur L'. Si L et L' se coupent en un point $u \in int[K]$, on peut déduire que $a_{L'} = a_L$. Il existe donc $a \in \mathbb{R}$ telle que $S(u) - a\,M(u|K) = 0$ dans toute la région $[K] \setminus [\mathcal{V} \setminus \{x_i\}]$.

Pour prouver que $S(u) - a\,M(u|K) = 0$ partout, on procède par récurrence. Notons pour cela $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V} \setminus \{x_i\}$ et $R_1 = [\mathcal{V}_1]$.

A chaque étape on peut choisir un point $u \in \mathcal{V}_i$ qui soit à la fois un sommet de $R_i = [\mathcal{V}_i]$ et un sommet d'un polygone de la partition $\mathcal{T}$ où l'égalité (4.13) a déjà été démontrée. On obtient de cette façon $\mathcal{V}_{i+1} = \mathcal{V}_i \setminus \{u\}$ et $R_{i+1} = [\mathcal{V}_{i+1}]$.

Soit L_i une droite qui sépare u de R_{i+1}. Les intersections de L_i avec chaque ligne de nœuds, qui sont dans R_i, sont en nombre strictement inférieur à n. Ceci est clair si $u \notin K$. Si $u \in K$, L_i peut coupes au plus n lignes de nœuds. Mais comme on a choisi u sommet d'un polygone de $\mathcal{T}$ qui ne soit pas dans R_i, au moins une de ces intersections ne sera pas dans R_i. Le polynôme par morceaux défini sur L_i avec au plus $k + 1$ nœuds est nécessairement nul.

De cette façon, sur les polygones de la partition $\mathcal{T}$ ayant u pour sommet, l'égalité $S(u) - a\,M(u|K) = 0$ est vérifiée. En enlevant un sommet à la fois, on arrive à prouver que l'égalité est vraie sauf sur un ensemble R_N, d'intérieur vide. ■

Avec ces deux lemmes, qui ont un intérêt en eux-mêmes, on va établir une relation fondamentale entre $M(\cdot|V_\beta)$ et les B-poids $B_\beta(\cdot)$.

Avec les hypothèses (4.2) et (4.3) qu'on supposera dans toute la section, on peut assurer que tous les ensembles de nœuds V_β sont en position générale. Ceci entraîne que chacune des splines simpliciales $M(\cdot|V_\beta)$ est de classe C^{k-1}.

Théorème 4.14 *Pour tout β, $|\beta| = k$, il existe une unique fonction $\mathcal{N}_\beta$, polynômiale par morceaux, de degré k sur la partition de $\mathbb{R}^2$ définie par V_β, de classe C^{k-1}, ayant pour support $co\,V_\beta$ et dont la restriction à Ω_k soit B_β.*

Démonstration : Fixons un β, $|\beta| = k$. Soit M_β la spline simpliciale correspondante aux nœuds V_β. Cette fonction vérifie toutes les propiétés du théorème sauf que sa restriction à Ω_k ne coïncide pas nécessairement avec B_β.

Considérons les droites L_γ, $|\gamma| = k$, définies dans le théorème 4.5, joignant les points x_{0,γ_0} et x_{1,γ_1}, avec $\gamma_0 + \gamma_1 \leq k$. Appliquons le théorème 4.5 avec $F^-(u) \equiv 0$ et $F^+(u) \equiv F$, où F est la restriction de M_β à Ω_k et f sa floraison. Puisque le support de M_β est $co\,V_\beta$, les discontinuités de la dérivée k-ième le long de L_γ seront nulles pour $\gamma_0 > \beta_0$ ou $\gamma_1 > \beta_1$. En utilisant l'expression (4.8) du théorème 4.5, on obtient que $f(X_\gamma) = 0$ pour $|\gamma| = k$ tel que $\gamma_0 > \beta_0$ ou $\gamma_1 > \beta_1$.

Avec le même argument, mais cette fois pour les droites joignant les nœuds x_{1,γ_1} et x_{2,γ_2}, avec $\gamma_1 + \gamma_2 \leq k$, on obtient que $f(X_\gamma) = 0$ pour tout γ ($|\gamma| = k$) tel que $\gamma_1 > \beta_1$ ou $\gamma_2 > \beta_2$. Et similairement pour les droites joignant les nœuds x_{2,γ_2} et x_{0,γ_0}, avec $\gamma_0 + \gamma_2 \leq k$.

Finalement, pour tous les γ ($|\gamma| = k$) qui vérifient $\gamma_0 > \beta_0$ ou $\gamma_1 > \beta_1$ ou $\gamma_2 > \beta_2$, on a :

$$f(X_\gamma) = 0,$$

donc, pour tous les γ tels que $\gamma \neq \beta$.

Puisque $f(X_\beta) \neq 0$ (sinon F serait identiquement nulle), le polynôme $F/f(X_\beta)$ vérifie (1.25), c'est-à-dire, est égal à B_β et, par conséquent, la fonction

$$\mathcal{N}_\beta := \frac{M_\beta}{f(X_\beta)}$$

est l'unique fonction vérifiant les conditions du théorème. ∎

Remarque : En utilisant les relations de récurrence pour les splines simpliciales, on peut prouver que (cf. section 4.4)

$$\mathcal{N}_\beta(u) = \frac{Vol_2(\Delta_\beta)}{d_k} M_\beta(u),$$

donc $f(X_\beta) = d_k / Vol_2(\Delta_\beta)$.

Théorème 4.15 *Soit $F \in \mathcal{P}_k(I\!R^2)$ et soit f sa floraison. La fonction :*

$$\sum_{|\beta|=k} f(X_\beta)\, \mathcal{N}_\beta(u)$$

est une fonction polynômiale par morceaux de degré k , de classe C^{k-1} dont la restriction à Ω_k est égale à F.

Démonstration : Pour chaque β, on a $\mathcal{N}_\beta(u) = B_\beta(u)$ pour $u \in \Omega$ et le résultat s'obtient en appliquant 1.26. ∎

On introduit maintenant une triangulation $\mathcal{T}$ de $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{T} = \{\Delta^I \mid I \in \mathcal{I}\}$$

avec $\Delta^I = co\,\{x_0^I, x_1^I, x_2^I\}$. A chaque sommet de la triangulation, on associe un “nuage” de k nœuds additionnels, $x_{j,1}^I, \ldots, x_{j,k}^I$ ($x_{j,0}^I = x_j^I$). Observons que si $x_i^I = x_j^J$, alors on a aussi $x_{i,l}^I = x_{j,l}^J$, $l = 1, \ldots, k$.
Pour chaque triangle, on suppose que :

$$\Omega_k^I := \bigcap_{|\beta| \leq k} int\,\Delta_\beta^I \neq \emptyset$$

et qu'il n'y a pas trois points dans V_β, $|\beta| = k$ qui soient colinéaires.

Définissons

$$V_\beta^I := \{x_{0,0}^I, \dots, x_{0,\beta_0}^I, x_{1,0}^I, \dots, x_{1,\beta_1}^I, x_{2,0}^I, \dots, x_{2,\beta_2}^I\}.$$

Soit $\mathcal{N}_\beta^I$ la B-spline normalisée associée à V_β^I comme au théorème 4.14.

Théorème 4.16 *Soient Δ^I et Δ^J deux triangles adjacents de $\mathcal{T}$. Si deux polynômes F^I et F^J (de floraisons f^I et f^J respectivement) se raccordent à l'ordre $k-1$ le long de L_γ avec $\gamma = (0,0,k)$, alors la fonction :*

$$\sum_{|\beta|=k} f^I(X_\beta^I)\,\mathcal{N}_\beta^I(u) + \sum_{|\beta|=k} f^J(X_\beta^J)\,\mathcal{N}_\beta^J(u) \tag{4.17}$$

ne présente pas de discontinuité de la dérivée k-ième le long des segments $]x_{0,\beta_0}^I, x_{1,\beta_1}^I[$ pour tout β_0, β_1, $\beta_0+\beta_1 \le k$ sauf pour $\beta_0 = 0$ et $\beta_1 = 0$.

Démonstration : Avec nos hypothèses, les d_k droites L_β, $|\beta| = k$, joignant x_{0,β_0}^I et x_{1,β_1}^I avec $\beta_0 + \beta_1 \le k$, sont distinctes. On peut choisir deux points $\omega^I \in \Omega^I$ et $\omega^J \in \Omega^J$ tels que la droite L qui les joint coupe les droites L_β en d_k points distincts. De la même façon, on peut trouver deux droites L' et L'' parallèles à L telles que la région ouverte $]L', L''[$ contienne L et coupe les d_k droites en d_k intervalles disjoints I_β.

Les droites L_β produisent une partition de $]L', L''[$. Dénotons par $\mathcal{D}^I$ la composante qui coupe Ω^I et par $\mathcal{D}^J$ celle qui coupe Ω^J. Considérons la fonction polynômiale par morceaux sur $]L', L''[$ de la forme (4.6) qui coïncide avec F^I sur $\mathcal{D}^I$ et avec F^J sur $\mathcal{D}^J$.

Or, puisque

$$\Omega^I \cap Support\,\mathcal{N}_\beta^J = \emptyset \quad \text{et} \quad \Omega^J \cap Support\,\mathcal{N}_\beta^I = \emptyset$$

l'expression (4.17) coïncide avec F^I sur Ω^I et avec F^J sur Ω^J (cf. Théorème 4.15). Mais F^I et F^J ont un contact d'ordre $k-1$ le long de L_γ avec $\gamma = (0,0,k)$; selon le théorème 4.5 (et son corollaire 4.9 restreint à $]L', L''[$), il n'y a pas de discontinuités le long de $I_\beta =]L', L''[\cap]x_{0,\beta_0}^I, x_{1,\beta_1}^I[$, pour tout β_0, β_1 sauf pour $\beta_0 = 0$ et $\beta_1 = 0$.

Puisque le saut de la dérivée k-ième d'une spline simpliciale est constant le long de chaque ligne de nœuds, en particulier le long de $]x_{0,\beta_0}^I, x_{1,\beta_1}^I[$, la démonstration est complète. ■

On peut finalement présenter le résultat principal de la section qui propose une analogie avec le résultat sur les B-splines à une variable. Ce résultat est dû à Dahmen-Micchelli-Seidel [2] pour le cas S polynômiale et à Seidel [7] pour le cas S polynômiale par morceaux.

Théorème 4.18 *Si S est une fonction polynômiale de degré k sur la triangulation $\mathcal{T}$ et de classe C^{k-1}, alors*

$$S(u) = \sum_{I\in\mathcal{I}} \sum_{|\beta|=k} f^I(X_\beta^I)\,\mathcal{N}_\beta^I(u), \tag{4.19}$$

où F^I désigne la restriction de S à Δ^I et f^I est la floraison correspondante.

Démonstration : Dénotons par $\tilde{S}$ la fonction définie par le membre de droite de (4.19).
(i) Pour $u \in \Omega^I$, on obtient à partir du théorème 4.15 :

$$\tilde{S}(u) = \sum_{|\beta|=k} f^I(X^I_\beta)\,\mathcal{N}^I_\beta(u) = S(u)$$

(ii) Considérons deux triangles adjacents Δ^I et Δ^J. Supposons que $x_0^I = x_0^J$ et $x_1^I = x_1^J$. Selon le théorème 4.16, la fonction $\tilde{S}$ n'aura pas de discontinuités le long des segments $]x^I_{0,\beta_0}, x^I_{1,\beta_1}[$ pour tout β_0, β_1, $\beta_0 + \beta_1 \leq k$ sauf pour $\beta_0 = 0$ et $\beta_1 = 0$.
(iii) On a montré que $\tilde{S} - S$ est une fonction polynômiale par morceaux de degré k et de classe C^{k-1}, nulle partout sauf sur les ensembles $C_j^I := co\{x^I_{j,0}, \ldots, x^I_{j,k}\}$. En appliquant le lemme 4.11 avec $m = k$ sur un voisinage de ces ensembles, on voit que $\tilde{S} - S$ est identiquement nulle. ∎

Une conséquence immédiate de ce dernier théorème est que les B-splines $\mathcal{N}^I_\beta$ constituent une partition de l'unité

$$\sum_{I \in \mathcal{I}} \sum_{|\beta|=k} \mathcal{N}^I_\beta(u) = 1 \quad \forall u \in \mathbb{R}^2.$$

Il suffit de prendre $S(\cdot) \equiv 1$ dans le théorème 4.18.

Remarque : Le dernier théorème assure, entre autres que $\mathrm{Lin}\{\mathcal{N}^I_\beta\}$ contient $\mathcal{P}_k(\mathbb{R}^2)$. Ceci assure des propriétés d'approximation pour les espaces de splines ainsi générés. Par ailleurs, la propriété des B-splines de constituer une partition de l'unité permet d'envisager des applications en CAGD où les coefficients des B-splines seront des pôles c'est-à-dire des points de contrôle.

4.3 Elimination de lignes de nœuds.

Le schéma présenté dans la section précédente a l'intérêt de produire des surfaces

$$S(u) = \sum_{I \in \mathcal{I}} \sum_{|\beta|=k} c^I_\beta\,\mathcal{N}^I_\beta(u) \tag{4.20}$$

polynômiales par morceaux de degré k et de classe C^{k-1} pour tout choix des coefficients $c^I_\beta \in \mathbb{R}$.

Ceci nous laisse autant de degrés de liberté sur chaque triangle Δ^I que s'il s'agissait de choisir un polynôme arbitraire de degré k sur chaque triangle.

On peut aussi choisir sur chaque Ω^I_k, un polynôme F^I arbitraire de degré k et à partir de

$$c^I_\beta = f^I(X^I_\beta)$$

on obtient une surface qui raccorde ces patches globalement C^{k-1}. Ceci est possible en partitionant le domaine avec toutes les lignes de nœuds, ce qui assure la flexibilité suffisante.

A la limite, si les nuages de nœuds convergent vers les sommets de la triangulation, toute cette régularité serait perdue, et on se retrouverait avec une surface polynômiale par morceaux discontinue.

Dans cette section on va présenter des conditions qui assurent dans ces cas limites un certain degré de continuité, et qui serviront de moyen pour produire des surfaces moins rugueuses, mais aussi moins flexibles.

Pour la suite on note F^I le polynôme de degré k, restriction de la fonction $S(\cdot)$, donnée par l'expression (4.20), à l'ensemble Ω^I_k.

On dira que la ligne de nœuds $[x^I_{i,\beta_i}, x^I_{j,\beta_j}]$ est absente de S, ou qu'elle a été éliminée de S, si la dérivée k-ième de S est continue au travers de celle-ci.

En général, si les coefficients c^I_β sont choisis arbitrairement dans l'expression de S, aucune ligne de nœuds sera absente.

Théorème 4.21 *Soient Δ^I et Δ^J deux triangles adjacents, qui partagent les sommets $x^I_0 = x^J_0$ et $x^I_1 = x^J_1$. Alors, les lignes de nœuds*

$$[x^I_{i,\beta_i}, x^I_{j,\beta_j}] \ \ \forall\beta,\ |\beta| = k,\ \beta_2 \le r$$

seront absentes si et seulement si

$$c^I_\beta = f^J(X^I_\beta) \ \ \forall\beta,\ |\beta| = k,\ \beta_2 \le r. \tag{4.22}$$

Démonstration : D'après le théorème 4.5 appliqué à $F^- = F^I$ et $F^+ = F^J$, la ligne de nœuds $[x^I_{i,\beta_i}, x^I_{j,\beta_j}]$ sera absente si le coefficient μ_β de (4.6) est nul.

Les relations de récurrence (4.8) permettent d'assurer que cette condition est équivalente à poser

$$f(X^I_\beta) = 0 \ \ \forall\beta,\ |\beta| = k,\ \beta_2 \le r \tag{4.23}$$

Mais $F = F^I - F^J$, donc

$$f^I(X^I_\beta) = f^J(X^I_\beta) \tag{4.24}$$

Le résultat s'obtient du fait que

$$f^I(X^I_\beta) = c^I_\beta \qquad \blacksquare$$

Remarque : Le cas $r = 0$ est particulièrement simple. Ici les conditions se réduisent à :

$$c^I_\beta = c^J_\beta \ \ \forall\beta = (\beta_0, \beta_1, 0),\ |\beta| = k.$$

Cette condition rappelle celle du raccordement C^0 des B-patches.

Pour $r > 0$, les conditions (4.22) deviennent des relations affines entre les pôles de F^I et F^J.

Si les nuages de nœuds additionnels tendent vers le sommet respectif, le théorème 1.39 peut être appliqué d'où on conclut qu'à la limite on se retrouvera avec une surface de classe au moins C^k. Dans ce cas, les conditions affines deviendront les conditions de continuité C^r pour les surfaces de Bézier.

On retrouve de cette façon un parallèle entre une spline S donnée par (4.20) et les surfaces composées de patches de Bézier.

4.4 Le résultat de H. P. Seidel.

Dans cette section, la seule hypothèse sur la triangulation $\mathcal{T}$ sera :

$$\Omega_k^I := int(\bigcap_{|\beta|\leq k} \Delta_\beta^I) \neq \emptyset \quad \forall I \in \mathcal{I}. \tag{4.25}$$

Lemme 4.26 *Le signe du déterminant*

$$\varepsilon_\beta^I := det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_{0,\beta_0}^I & x_{1,\beta_1}^I & \cdots & x_{s,\beta_s}^I \end{pmatrix}$$

ne dépend pas de β, mais seulement de l'indice $I \in \mathcal{I}$.

Démonstration : Pour β tel que $\beta_j > 0$, notons H l'hyperplan défini par les points x_{i,β_i} pour $i \neq j$. Ces points sont les sommets de la face commune aux deux simplexes Δ_β^I et $\Delta_{\beta-e_j}^I$. On observe que l'hypothèse (4.25) entraîne que $\Delta_\beta^I \cap \Delta_{\beta-e_j}^I \neq \emptyset$, donc x_{j,β_j} et x_{j,β_j-1} se trouvent du même côté de H.

D'un autre côté, H admet pour équation

$$det \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 & \ldots & 1 \\ x_{0,\beta_0}^I & \ldots & u & \ldots & x_{s,\beta_s}^I \end{pmatrix} = 0$$

où u occupe la j-ième colonne du déterminant. On conclut donc que $\varepsilon_\beta^I = \varepsilon_{\beta-e_j}^I$. De proche on proche, on trouve que $\varepsilon_\beta^I = \varepsilon_{(0,\ldots,0)}^I$. ■

Remarque : On dira que ε_β^I représente l'orientation du simplexe Δ_β^I. Ce lemme nous affirme que sous l'hypothèse (4.25), tous les simplexes Δ_β^I pour un même $I \in \mathcal{I}$ ont la même orientation.

Puisque pour un β tel que $\beta_j = 0$, V_β^I comprend un seul nœud associé au j-ième sommet, on convient de noter dans ce cas

$$V_{\beta-e_j}^I := \{x_{i,l} \mid i \neq j,\ 0 \leq l \leq \beta_i\}.$$

Le lemme suivant, assez intuitif, est aussi une conséquence de l'hypothèse (4.25). Une démonstration, malheureusement très technique, est présentée dans [2].

Lemme 4.27 *Pour β tel que $\beta_j = 0$, on a*

$$[V^I_{\beta-e_j}] \cap \Omega^I_k = \emptyset.$$

Définition 4.28 *Pour tout triangle $\Delta^I \in \mathcal{T}$ et tout β, $|\beta| \leq k$ on définit*

$$\mathcal{N}^I_\beta(u) := \frac{s!k!}{(s+k)!}\, a^I_\beta\, M(u|V^I_\beta).$$

où $a^I_\beta := Vol_s \Delta^I_\beta$. Ces splines simpliciales sont aussi appelées B-splines associées à la partition $\mathcal{T}$.

Selon le résultat suivant, cette dernière définition est en accord avec le théorème 4.14.

Théorème 4.29

$$\mathcal{N}^I_\beta(u) = B^I_\beta(u) \quad \forall u \in \Omega^I_k.$$

Démonstration : Soit $u \in \Omega^I_k \subseteq \Delta^I_\beta$; on peut l'exprimer comme

$$u = \sum_{j=0}^{s} \lambda^I_{\beta,j}(u)\, x^I_{j,\beta_j}.$$

Si on applique les relations de récurrence pour les splines simpliciales (cf. théorème 2.18) à $M(u|V^I_\beta)$, on obtient

$$M(u|V^I_\beta) = \frac{s+k}{k} \sum_{j=0}^{s} \lambda^I_{\beta,j}(u)\, M(u|V^I_{\beta-e_j}). \tag{4.30}$$

On peut vérifier aisément que pour tout $j \in \{0, \ldots, s\}$ on a

$$a^I_\beta\, \lambda^I_{\beta,j} = a^I_{\beta-e_j}\, \lambda^I_{\beta-e_j,j} \tag{4.31}$$

et donc obtenir à partir de (4.30)

$$\mathcal{N}^I_\beta(u) = \sum_{j=0}^{s} \lambda^I_{\beta-e_j,j}\, \mathcal{N}^I_{\beta-e_j}(u), \tag{4.32}$$

avec la précaution suivante : si $\beta_j = 0$, alors $\mathcal{N}^I_{\beta-e_j}$ n'est pas bien défini. Mais dans ce cas, suivant le lemme 4.27, le support de $M(u|V^I_{\beta-e_j})$ ne coupe pas Ω^I_k. On convient donc de poser alors :

$$\mathcal{N}^I_\beta(\cdot) \equiv 0 \tag{4.33}$$

si une des composantes de β est négative. De cette façon (4.32) est valable pour tout $u \in \Omega^I_k$.

D'autre part, pour $\beta = (0, \ldots, 0)$, on a

$$\mathcal{N}^I_{(0,\ldots,0)}(\cdot) = \chi_{\Delta^I}(\cdot). \tag{4.34}$$

On observe finalement que les relations (4.32), (4.33) et (4.34) permettent le calcul de $\mathcal{N}^I_\beta$ sur Ω^I_k et que se sont les mêmes relations de récurrence vérifiées par les B-poids (voir théorème 1.33). ∎

Remarque : Si les nuages de nœuds additionnels sont confondus avec les sommets respectifs, on a d'une part $\Omega^I_k = \Delta^I$ et d'autre part, sur Δ^I, les B-splines $\mathcal{N}^I_\beta$ coïncident avec les polynômes de Bernstein-Bézier classiques.

Définition 4.35 *On dira que le nœud x^I_i possède une multiplicité μ si*

$$x^I_{i,0} = x^I_{i,1} = \cdots = x^I_{i,\mu-1}.$$

On est maintenant prêt pour énoncer le résultat de Seidel.

Théorème 4.36 *Soit S une fonction polynômiale par morceaux sur $\mathcal{T}$ de degré k et de classe C^ν. Si les nœuds de la triangulation $\mathcal{T}$ possèdent une multiplicité $\mu := k - \nu$, alors*

$$S(u) = \sum_{I\in\mathcal{I}} \sum_{|\beta|=k} f^I(X^I_\beta)\,\mathcal{N}^I_\beta(u)$$

où f^I est la floraison de F^I, restriction de S au simplexe Δ^I.

Avant de passer à sa démonstration, présentons deux conséquences directes de ceci.

Corollaire 4.37 *On a l'inclusion*

$$\mathcal{P}_k(I\!R^s) \subset \operatorname{Lin}\{\mathcal{N}^I_\beta \mid |\beta| = k,\ I \in \mathcal{I}\}$$

où aucune condition sur la multiplicité n'est requise.

Si $F \in \mathcal{P}_k(\mathbb{R}^s)$, son expression selon le théorème 4.36 est

$$F(u) = \sum_{I\in\mathcal{I}} \sum_{|\beta|=k} f(X^I_\beta)\,\mathcal{N}^I_\beta(u).$$

Pour le cas particulier $F \equiv 1$, on obtient

Corollaire 4.38

$$\sum_{I\in\mathcal{I}} \sum_{|\beta|=k} \mathcal{N}^I_\beta(u) \equiv 1.$$

Remarque : Ces deux corollaires ainsi que le théorème 4.36 reposent d'une façon cruciale sur le fait que $\mathcal{T}$ soit une triangulation de tout $\mathbb{R}^s$ et non seulement d'une partie de celui-ci. Si on veut étendre ces résultats au cas d'une triangulation pour une partie bornée de $\mathbb{R}^s$, des précautions additionnelles devront être prises au voisinage de la frontière de cette partie.

Démonstration : (du théorème 4.36.)

La démonstration se fait par récurrence.

Notons d'abord que, pour S de degré $k-\nu-1$ et de classe C^{-1}, le résultat est vrai.

En effet, dans ce cas la multiplicité de chaque nœud est $\mu = k-\nu$, donc les nuages de nœuds additionnels sont confondus avec les sommets. On a déjà fait la remarque que, dans ce cas,

$$\mathcal{N}^I_\beta(u) = B^I_\beta(u) \quad \forall u \in \Delta^I.$$

Le résultat est alors une conséquence directe de (1.26).

Supposons que le résultat soit vrai pour une fonction polynômiale par morceaux sur $\mathcal{T}$ de degré $k-1$ et de classe $C^{\nu-1}$. On va prouver que le résultat est aussi valable pour le degré k et la classe C^ν.

Définissons pour S, fonction polynômiale par morceaux de degré k et de classe C^ν,

$$\begin{aligned} S_w(u) &:= F^I_w(u) \\ &:= f^I(w\, u^{k-1}) \quad \text{si} \quad u \in \Delta^I. \end{aligned}$$

La fonction S_w est polynômiale par morceaux de degré $k-1$ et de classe $C^{\nu-1}$. L'hypothèse d'induction s'applique, donc :

$$S_w(u) = \sum_{I\in\mathcal{I}} \sum_{|\beta|=k-1} C^I_\beta(w)\, \mathcal{N}^I_\beta(u) \tag{4.39}$$

avec $C^I_\beta(w) = f^I(w\, X^I_\beta)$, pour tout β qui vérifie $|\beta| = k-1$. Mais puisque

$$w = \sum_{j=0}^{s} \lambda^I_{\beta,j}(w)\, x^I_{j\beta_j},$$

on obtient

$$C^I_\beta(w) = \sum_{j=0}^{s} \lambda^I_{\beta,j}(w)\, C^I_{\beta+e_j},$$

où on note, comme pour l'algorithme de Seidel-De Boor-De Casteljau, $C^I_\beta := f^I(X^I_\beta)$ pour tout β tel que $|\beta| = k$. En prenant $w = u$ dans cette dernière expression, (4.39) devient

$$S(u) = \sum_{I\in\mathcal{I}} \sum_{|\beta|=k-1} \sum_{j=0}^{s} \lambda^I_{\beta,j}(u)\, C^I_{\beta+e_j}\, \mathcal{N}^I_\beta(u). \tag{4.40}$$

On doit prouver que $S(u)$ peut s'exprimer comme

$$\sum_{I\in\mathcal{I}} \sum_{|\beta|=k} C^I_\beta\, \mathcal{N}^I_\beta(u). \tag{4.41}$$

Si on remplace, dans (4.40) et dans (4.41), $\mathcal{N}^I_\beta$ par son expression

$$\frac{s!k!}{(s+k)!}\, a^I_\beta\, M(u|V^I_\beta)$$

et si on applique les relations de récurrence pour les splines simpliciales dans (4.41), on est amené à prouver l'égalité entre

$$\sum_{I\in\mathcal{I}} \sum_{|\beta|=k-1} \sum_{j=0}^{s} \lambda^I_{\beta,j}(u)\, C^I_{\beta+e_j}\, a^I_\beta\, M(u|V^I_\beta) \tag*{(4.40)$'$}$$

et

$$\sum_{I\in\mathcal{I}} \sum_{|\beta|=k} \sum_{j=0}^{s} \lambda^I_{\beta,j}(u)\, C^I_\beta\, a^I_\beta\, M(u|V^I_{\beta-e_j}). \tag*{(4.41)$'$}$$

Pour rapprocher ces deux expressions, observons que pour chaque $j \in \{0,\ldots,s\}$ l'application

$$\beta \in \Gamma_{k-1} := \{\beta \mid |\beta| = k-1\} \longmapsto \beta + e_j \in \Gamma^{(j)}_k := \{\beta \mid |\beta| = k \text{ et } \beta_j \neq 0\}$$

est une bijection. L'expression (4.40)' s'écrit alors comme

$$\sum_{I\in\mathcal{I}} \sum_{j=0}^{s} \sum_{\beta\in\Gamma^{(j)}_k} \lambda^I_{\beta-e_j,j}(u)\, C^I_\beta\, a^I_{\beta-e_j}\, M(u|V^I_{\beta-e_j})$$

ou encore, grâce à (4.31),

$$\sum_{I\in\mathcal{I}} \sum_{j=0}^{s} \sum_{\beta\in\Gamma^{(j)}_k} \lambda^I_{\beta,j}(u)\, C^I_\beta\, a^I_\beta\, M(u|V^I_{\beta-e_j}). \tag*{(4.40)$''$}$$

L'égalité des expressions (4.40) et (4.41) revient donc à montrer que

$$\sum_{I\in\mathcal{I}}\sum_{j=0}^{s}\sum_{\substack{|\beta|=k\\ \beta_j=0}} \lambda^I_{\beta,j}(u)\, C^I_\beta\, a^I_\beta\, M(u|V^I_{\beta-e_j}) = 0. \tag{4.42}$$

Pour cela, on observe que les termes de (4.42) s'annulent deux à deux. En effet, au terme correspondant aux indices (I,j,β) on peut associer le terme correspondant à (J,j,β) où Δ^J est l'unique simplexe de $\mathcal{T}$ qui partage avec Δ^I la face opposée au sommet j-ième de Δ^I. Pour simplifier l'écriture, on a supposé que les sommets en commun de la face partagée entre Δ^I et Δ^J sont numérotés dans le même ordre, c'est-à-dire, $x^I_i = x^J_i$ pour tout $i \neq j$.

Il est évident que $V^I_{\beta-e_j} = V^J_{\beta-e_j}$, ce qui réduit (4.42) à prouver :

$$\lambda^I_{\beta,j}(u)\, C^I_\beta\, a^I_\beta + \lambda^J_{\beta,j}(u)\, C^J_\beta\, a^J_\beta = 0. \tag{4.43}$$

Or, F^I et F^J ont un contact d'ordre ν le long de la face commune. Ceci, combiné au fait qu'il y a au moins μ points de $X^I_\beta = X^J_\beta$ qui sont sur cette face commune, permet d'assurer (cf. théorème 1.39) que :

$$f^I(X^I_\beta) = f^J(X^J_\beta),$$

donc, $C^I_\beta = C^J_\beta$.

D'autre part, l'expression de la coordonnée barycentrique $\lambda^I_{\beta,j}(u)$ s'écrit

$$\begin{aligned}\lambda^I_{\beta,j}(u) &= \frac{det\begin{pmatrix}1 & \dots & 1 & \dots & 1\\ x^I_{0\beta_0} & \dots & u & \dots & x^I_{s\beta_s}\end{pmatrix}}{det\begin{pmatrix}1 & \dots & 1 & \dots & 1\\ x^I_{0\beta_0} & \dots & x^I_{j\beta_j} & \dots & x^I_{s\beta_s}\end{pmatrix}}\\ &= \frac{det\begin{pmatrix}1 & \dots & 1 & \dots & 1\\ x^I_{0\beta_0} & \dots & u & \dots & x^I_{s\beta_s}\end{pmatrix}}{\varepsilon^I\, s!\, a^I_\beta}\end{aligned}$$

et celle de $\lambda^J_{\beta,j}(u)$ s'écrit donc

$$\lambda^J_{\beta,j}(u) = \frac{det\begin{pmatrix}1 & \dots & 1 & \dots & 1\\ x^I_{0\beta_0} & \dots & u & \dots & x^I_{s\beta_s}\end{pmatrix}}{\varepsilon^J\, s!\, a^J_\beta}\,.$$

Comme $x^I_{j\beta_j}$ et $x^J_{j\beta_j}$ se situent de part et d'autre de la face commune, les orientations de Δ^I et Δ^J sont nécessairement de signes opposés, c'est-à-dire, $\varepsilon^I = -\varepsilon^J$, ce qui prouve finalement (4.43). ■

Quelques problèmes ouverts.

(1) Comment contrôler la flexibilité d'un tel schéma pour assurer la simplicité du choix des pôles, mais aussi pour produire des surfaces suffisamment lisses?

(2) L'utilisateur a beaucoup de degrés de liberté. Une spline quadratique nécessite six pôles par triangle. La condition du dernier théorème avec $r = 0$ ramène ces degrés de liberté à un pôle par sommet et un pôle par côté de triangle. En général, comment diminuer les choix que l'utilisateur doit faire pour spécifier une surface?

(3) Quel algorithme utiliser pour évaluer S? En CAGD, un des buts recherchés est de produire des images en temps réel pour permettre au concepteur de construire son modèle de façon interactive. Les algorithmes à proposer devront donc vérifier cette contrainte.

Références

1. Dahmen W., Micchelli C.A., *On the linear independence of multivariate B-splines II : Complete configurations*, *Math. Comp.*, **41**, (1983), pp 143–163.
2. Dahmen W., Micchelli C.A., Seidel H.P., *Blossoming begets B-splines built better by B-patches*, *Math. Comp.*, **59**, (1992), pages 97–115.
3. Fong P., Seidel H.-P., *An implementation of multivariate B-spline surfaces over arbitrary triangulations*, à paraître dans *Computer-Aided Geom. Design*.
4. Gormaz R., Laurent P.J., *Some results on blossoming and multivariate B-splines*, à paraître dans K. Jetter et F. Utreras (eds.) *Multivariate Approximation and Wavelets*. Word Scientific, Singapore, 1993.
5. Ramshaw L., *Blossoming : A connect-the-dots approach to splines*, DEC System Research Center Report 19, June (1987), 172 pages.
6. Seidel H.P., *Polar forms and triangular B-spline surfaces*, Blossoming : The new polar form approach to spline curves and surfaces. SIGGRAPH'91, 1991, Course notes #26, pp 8.1–8.52.
7. Seidel H.P., *Representing piecewise polynomials as linear combinations of multivariate B-splines*, in T. Lyche and L.L. Schumaker, eds., *Curves and Surfaces*, Academic Press, (1992), pages 559–566.

Bibliographie

[AGNS91] Auerbach S., Gmelig R.H.J., Neamtu M., Schaeben H., *Approximation and geometric modeling with simplex B-splines associated with irregular triangles*, *Computer-Aided Geom. Design*, 8, (1991), pages 67–87.

[dB76] de Boor C., *Splines as linear combinations of B-splines*, dans : " *Approximation Theory 2* ", G.G.Lorentz, C.K.Chui and L.L.Schumaker (eds.), Academic Press, New York, (1976), pages 1–47.

[dB87] de Boor C., *B-forms basics*, dans : *"Geometric Modeling"*, G. Farin, (ed), SIAM Philadelphia, (1987), pages 131–148.

[dBDeV83] de Boor C., DeVore R. *Approximation by smooth multivariate splines*, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 276, (1983), pages 775–788.

[dNHg82] De Boor C., Höllig K., *Recurrence relation for multivariate splines*, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 85, (1982), pages 397–400.

[dNHg83] De Boor C., Höllig K., *B-splines from parallelepipeds*, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 42, (1982/83), pages 99–115.

[CaMicSha80] Cavaretta A.S., Micchelli C.A. et Sharma A., *Multivariate interpolation and the Radon transform*, *Math. Z.*, 174, (1980), pages 263–279.

[CaMic92] Cavaretta A.S., Micchelli C.A., *Pyramid patches provide potential polynomial paradigms*, dans : *"Mathematicals Methods in CAGD and image processing"*, T. Lyche and L.L. Schumaker, (eds.), Acad. Press (1992)

[CoLyRie87] Cohen E., Lyche T., Riesenfeld R.F., *Cones and recurrence relations for simplex splines* *Constr. Approx.*, 3, (1987), pages 131–141.

[CurSch66] Curry H.B., Schoenberg I.J., *On Pólya frequency functions IV; The fundamental spline functions and their limits*, *J. Analyse Math.*, 17, (1966), pages 71–107.

[Dah79] Dahmen W., *Polynomials as linear combinations of multivariate B-splines*, *Math. Z.*, 169, (1979), pages 93–98.

[Dah80] Dahmen W., *On multivariate B-splines*, *SIAM J. Numer. Anal.*, 17, (1980), pages 179–191.

[DahMic81] Dahmen W., Micchelli C.A., *On the limits of multivariate B-splines*, *J. Analyse Math.*, 39, (1981), pages 256–278.

[DahMic83a] Dahmen W., Micchelli C.A., *On the linear independence of multivariate B-splines I : Triangulation of simploids*, *SIAM J. Numer. Anal.*, 19, (1982), pp 993–1012.

[DahMic83a] Dahmen W., Micchelli C.A., *On the linear independence of multivariate B-splines II : Complete configurations*, *Math. Comp.*, **41**, (1983), pp 143–163.

[DahMic83b] Dahmen W., Micchelli C.A., *Recent progress in multivariate splines*, dans : *"Approximation Theory IV"*, C.K. Chui et al., (eds.), (1983), Acad. Press, pages 27–121.

[DahMic86] Dahmen W., Micchelli C.A., *Statistical encounter with B-splines*, dans : *"Function Estimates"*, Contemporary Math. series of AMS, 59, (1986), pages 17–48.

[DahMic92] Dahmen W., Micchelli C.A., Seidel H.P., *Blossoming begets B-splines built better by B-patches*, *Math. Comp.*, **59**, (1992), pages 97–115.

[FongS93] Fong P., Seidel H.-P., *An implementation of multivariate B-spline surfaces over arbitrary triangulations*, à paraître dans *Computer-Aided Geom. Design*.

[GODEMENT] Godement R., *Cours d'algèbre*, HERMANN, Paris, (1963).

[Gdm83] Goodman T.N.T., *Interpolation in minimum semi-norm and multivariate B-splines*, *J. Approx. Th.*, 37, (1983), pages 212–223.

[Gdm90] Goodman T.N.T., *Polyhedral splines*, dans : *"Computation of curves and surfaces"*, W. Dahmen et al., (eds.), Kluwer Acad. Publis., (1990), pages 347–382.

[GdmLee81] Goodman T.N.T, Lee S.L., *Spline approximation operators of Bernstein-Schoenberg type in one and two variables*, *J. Approx. Th.*, 33, (1981), pages 248–263.

[GL93] Gormaz R., Laurent P.-J., *Some results on blossoming and multivariate B-splines*, à paraître dans : K. Jetter et F. Utreras, (eds.), *"Multivariate Approximation and Wavelets"*, Word Scientific, Singapore, (1993).

[Grd87a] Grandine T.A., *The evaluation of inner products of multivariate simplex splines*, *SIAM J. Numer. Anal.*, 24, (1987), pages 882–886.

[Grd87b] Grandine T.A., *The computational cost of simplex spline functions*, *SIAM J. Numer. Anal.*, 24, (1987), pages 887–890.

[Grd88] Grandine T.A., *Stable evaluation of multivariate simplex splines*, *Math. Comp.*, 50, (1988), pages 197–205.

[Hk81] Hakopian H. *Les différences divisées de plusieurs variables et les interpolations multidimensionnelles de type lagrangien et hermitien*, *C.R. Acad. Sc.* Paris Serie I, t 292, (1981), pp 453–456.

[Hk82a] Hakopian H. *Multivariate divided differences and multivariate interpolation of Lagrange and Hermite type*, *J. Approx. Th.*, 34, (1982), pages 286–305.

[Hk82b] Hakopian H. *Multivariate spline functions, B-spline basis and polynomial interpolations*, *SIAM J. Numer. Anal.*, 19, (1982), pages 510–517.

[Hg82] Höllig K., *Multivariate splines*, *SIAM J. Numer. Anal.*, 19, (1982), pages 1013–1031.

[HgMic87] Höllig K., Micchelli C.A. *Divided differences, hyperbolic equations, and lifting distributions.*, *Constr. Approx.*, 3, (1987), pages 143–156.

[Mic80] Micchelli C.A. *A constructive approach to Kergin interpolation in* $\mathbb{R}^k$ *: Multivariate B-splines and Lagrange interpolation*, *Rocky Mt. J. Math.*, 10, (1980), pages 485–497.

[N92] Neamtu M., *Simplex Splines*, Thèse U. de Twente, The Neetherlands, (1992).

[Rm87] Ramshaw L., *Blossoming : A connect-the-dots approach to splines*, DEC System Research Center Report 19, June (1987), 172 pages.

[Rm89] Ramshaw L., *Blossoms are polar forms*, *Computer-Aided Geom. Design*, 6, (1989), pages 323–358.

[SCHWARTZa] Schwartz L., *Cours d'Analyse*, HERMANN, Paris.

[SCHWARTZb] Schwartz L., *Théorie des Distributions*, HERMANN, Paris.

[S91a] Seidel H.-P., *Symmetric triangular algorithms for curves*, *Computer-Aided Geom. Design*, 7, (1991), pages 57–67.

[S91b] Seidel H.-P., *Polar forms and triangular B-spline surfaces*, dans : *Blossoming : the new polar-form approach to spline curves and surfaces*, SIGGRAPH'91, 1991, course notes # 26, pages 8.1–8.52.

[S91c] Seidel H.-P., *Symmetric recursive algorithms for surfaces : B-Patches and the De Boor algorithm for polynomials over triangles*, *Constr. Approx.*, 7, (1991), pages 257–279.

[S92] Seidel H.-P., *Representing piecewise polynomials as linear combinations of multivariate B-splines*, dans : T. Lyche and L.L. Schumaker, eds., *"Curves and Surfaces"*, Academic Press, (1992), pages 559–566.

[Tr90] Traas C.R. *Practice of bivariate quadratic simplicial splines* dans : *"Computation of curves and surfaces"*, W. Dahmen et al., (eds.), Kluwer Acad. Pub. (1990), pages 383–442.

Table des Figures