XXXIII Semana de la Matemática
Instituto de Matemáticas
Pontificie Universidad Católica de Valparaíso

Introducción al

Análisis Convexo

Pedro Gajardo

Centro de Modelamiento Matemático

Universidad de Chile UMI 2807 CNRS

http://www.dim.uchile.cl/~pgajardo/

2006

Dado que la forma del Universo entero es la más perfecta y, de hecho, la más sabiamente creada, absolutamente nada en el mundo ocurriría sin que una minimizacíon o maximización esté actuando.

Leonhard Euler (1744)

Índice general

CAPÍTULO 1

Presentación

El presente documento ha sido elaborado con el objetivo de ser un apoyo a las charlas realizadas en la XXXIII Semana de la Matemática. El tema abordado es el *Análisis Convexo*, teoría que permite estudiar de manera unificada problemas de optimización y cálculo de variaciones en el contexto convexo. En estas páginas se podrán encontrar los primeros conceptos, resultados y ejemplos relacionados con esta disciplina, en particular, lo que concierne a la *Dualidad en optimización convexa*. La mayor parte de los contenidos de este apunte son presentados de manera similar (orden y demostraciones) al curso *Análisis Convexo y Dualidad* dictado el año 1999 por el profesor Roberto Cominetti en la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Chile. Otros resultados y demostraciones han sido obtenidos principalmente del apunte *Análisis Convexo y Dualidad* del Profesor Felipe Alvarez [1] quien dicta regularmente el curso de mismo nombre en la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Chile, y del libro, recientemente publicado, *Variational Analysis in Sobolev and BV spaces* de los autores Heddy Attouch, Giuseppe Buttazzo y Gérard Michaille [2]. Como bibliografía complementaria se recomienda el fundacional texto *Convex Analysis* de Tyrell Rockafellar [6] asi como el libro *Convex analysis and minimization algorithms* de Jean B. Hiriart-Urruty y Claude Lemaréchal [4, 5].

Este cursillo está orientado a estudiantes con un cierto bagaje en análisis funcional (como referencia ver [3]) aunque en su mayoría intenta ser autocontenido.

1.1 Conjuntos convexos

Durante el curso se trabajará en un espacio vectorial normado real (evn) $(X, \|\cdot\|)$ en dualidad con su espacio dual topológico X^* dotado de la norma usual

$$\|x^*\|_* := \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|\le 1}} \langle x, x^*\rangle \quad x^* \in X^*$$

donde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota el producto de dualidad entre X y X^*, es decir, para una función lineal continua $x^* \in X^*$ definida sobre el espacio X a valores en $I\!R$, se tiene $x^* : X \longrightarrow I\!R$ y escribiremos

$$\langle x, x^*\rangle = x^*(x) \qquad \forall\ x \in X. \tag{1.1.1}$$

Recordemos que la topología más pequeña en X que hace continua a los elementos en X^* es la *topología débil*. Por otro lado, dado $x \in X$ se tiene que el operador *evaluación* (que notaremos de igual manera) $x : X^* \longrightarrow I\!R$ definido por

$$x(x^*) = x^*(x) = \langle x, x^*\rangle$$

es lineal continuo (para la topología inducida por $\|\cdot\|_*$ en X^*), por lo tanto $X \subset X^{**}$. La topología más pequeña en X^* que hace ser continuos a los operadores evaluación (i.e. a los elementos de X) es la topología $*$-débil.

Si X es un espacio vectorial normado de Banach (completo) entonces todo conjunto acotado y cerrado (para la topología inducida por la norma $\|\cdot\|_*$) en X^* es compacto para la topología $*$-débil. Un espacio de Banach se dice reflexivo si X puede ser identificado con X^{**}. En este caso se tiene que los conjuntos acotados y cerrados (para la topología de la norma) en X son compactos para la topología débil. Por último, recordamos que los evn de Hilbert (dotados de producto interno, norma definida por el producto interno y completo para la topología inducida) pueden ser identificados con su espacio dual, en tal situación, el producto de dualidad entre el espacio y su dual es el producto interno que le da el carácter de Hilbert al espacio. Como los espacios de Hilbert son reflexivos se tendrá también que todo conjunto acotado y cerrado (para la topología de la norma) es compacto para la topología débil.

Se tendrá que un espacio vectorial normado X dotado de la topología débil y su dual topológico X^* dotado de la topología $*$-débil están en *dualidad* (ver detalles en [1]) gracias al par de dualidad definido en (1.1.1).

La mayor parte de la notación es la comunmente utilizada en los textos de análisis funcional (ver [3]).

Definición 1.1.1. Un conjunto $C \subset X$ se dice convexo si para todo par de puntos $x, y\ \in C$ se tiene

$$[x, y] := \{\alpha x + (1-\alpha)y\ :\ \alpha \in [0,1]\} \subset C.$$

De la teoría básica de geometría en evn se tiene que un hiperplano cerrado H en X puede ser representado por

$$H = \{x \in X \ : \ \langle x, x^* \rangle = \alpha\}$$

para algún $x^* \in X^*$ y $\alpha \in I\!R$. De igual modo, un semiespacio cerrado $\mathcal{H}$ de X puede ser representado por

$$\mathcal{H} = \{x \in X \ : \ \langle x, x^* \rangle \leq \alpha\}$$

para algún $x^* \in X^*$ y $\alpha \in I\!R$.

A continuación mostraremos que un conjunto convexo cerrado es descrito utilizando sólo formas lineales continuas (i.e. elementos en X^*). Este resultado está basado en el Teorema de Hahn-Banach que se presenta a continuación.

Teorema 1.1.1. *Sea $C \subset X$ un conjunto convexo cerrado no vacío del evn X. Entonces, cada elemento $u \notin C$ puede ser* fuertemente separado *de C por un hiperplano cerrado, es decir,*

$$\exists\ z^* \in X^*, \quad z^* \neq 0, \quad \exists\ \alpha \in I\!R \quad \textit{tal que} \ \ \langle u, z^* \rangle > \alpha \quad y \quad \langle x, z^* \rangle \leq \alpha \ \ \forall\ x \in C.$$

Demostración. La demostración es dada cuando el evn X es un espacio de Hilbert. Para el caso general, se utiliza la versión analítica del Teorema de Hahn-Banach el cual es una consecuencia del Lema de Zorn.

Recordemos que si X es un espacio de Hilbert entonces X^* se identifica con X y se tiene que $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$ (producto interno "="producto de dualidad).

Denotemos por $P_C(u)$ la proyección de $u \in X$ sobre el conjunto C (esta existe y es única, ver [3]). $P_C(u)$ está caracterizada por

$$\begin{cases} \langle u - P_C(u), x - P_C(u) \rangle \leq 0 \quad \forall\ x \in C \\ P_C(u) \in C. \end{cases}$$

Sea $z^* := u - P_C(u)$. Como $u \notin C$ se tiene $z^* \neq 0$ y de la caracterización de $P_C(u)$ se deduce

$$\sup_{x \in C} \langle x, z^* \rangle \leq \langle P_C(u), z^* \rangle. \tag{1.1.2}$$

Por otro lado,

$$0 < \|z^*\|^2 = \langle z^*, z^* \rangle = \langle u, z^* \rangle - \langle P_C(u), z^* \rangle,$$

lo que implica

$$\langle u, z^* \rangle > \langle P_C(u), z^* \rangle. \tag{1.1.3}$$

Tomemos $\alpha := \langle z, P_C(u)\rangle$. Combinando (1.1.2) y (1.1.3) se obtiene

$$\sup_{x\in C}\langle x, z^*\rangle \leq \alpha < \langle u, z^*\rangle,$$

lo cual demuestra el resultado. □

Corolario 1.1.1. *Sea $C \subset X$ un conjunto convexo cerrado no vacío del evn X. Entonces, C es la intersección de todos los semiespacios cerrados que lo contienen, es decir,*

$$C = \bigcap_{C\subset \mathcal{H}_{z^*,\alpha}} \mathcal{H}_{z^*,\alpha},$$

donde $\mathcal{H}_{z^*,\alpha} := \{x \in X \ : \ \langle x, z^*\rangle \leq \alpha\}$ para $z^* \in X^*$ y $\alpha \in I\!R$.

Demostración. Notemos $\mathcal{F}$ el conjunto de $X^* \times I\!R$ dado por (notar que es no vacío)

$$\mathcal{F} := \{(z^*, \alpha) \in X^* \times I\!R \ : \ C \subset H_{z^*,\alpha}\}.$$

Claramente

$$C \subset \bigcap_{(z^*,\alpha)\in\mathcal{F}} \mathcal{H}_{z^*,\alpha}.$$

Para probar la inclusión inversa tomemos $u \in \bigcap_{(z^*,\alpha)\in\mathcal{F}} \mathcal{H}_{z^*,\alpha}$. Si $u \notin C$, utilizando el teorema de separación de Hahn-Banach 1.1.1 se obtiene una contradicción. □

Observación 1.1.1. Los conjuntos cerrados $H_{z^*,\alpha}$ de la proposición anterior también resultan ser cerrados para la topología débil y por lo tanto el conjunto convexo cerrado C es cerrado para la topología débil (intersección de cerrados débiles). Así, una conclusión importante, y que será utilizada más adelante, del Corolario 1.1.1, es que todo conjunto convexo cerrado es también cerrado para la topología débil.

Proposición 1.1.1. *Sea $\{C_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset X$ una familia de conjuntos convexos cerrados no vacíos, entonces $C = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda$ es un conjunto convexo cerrado.*

Demostración. Propuesto. □

CAPÍTULO 2

Fundamentos de Análisis Convexo

En el análisis de problemas de minimización y maximización es conveniente considerar funciones que toman valores en la recta real extendida (mayores detalles ver en [1]) $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$ en lugar de sólo $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$. Por ejemplo, en un espacio vectorial normado (evn) X, consideremos un problema de minimización del tipo

$$\inf_{x \in C} f_0(x) = \inf\{f_0(x) \; : \; x \in C\} \tag{2.0.1}$$

donde $f_0 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es la *función objetivo* a minimizar y $C \subset X$ es un *conjunto de restricciones*. Con la topología apropiada, $\overline{\mathbb{R}}$ es un intervalo compacto. En particular, todo subconjunto $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ admite un ínfimo $\inf A$ (y un supremo $\sup A$). Así, tomando $A = \{f_0(x) \; : \; x \in C\}$ tenemos que $\inf\{f_0(x) \; : \; x \in C\}$ está bien definido en $\overline{\mathbb{R}}$. En este contexto resulta muy útil introducir la función indicatriz del conjunto C, $\Psi_C : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, definida por

$$\Psi_C(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \in C, \\ +\infty & \text{si } x \notin C. \end{cases}$$

Con la convención

$$\alpha + (+\infty) = (+\infty) + \alpha = +\infty \quad \forall \; \alpha \in \mathbb{R},$$

es posible definir la función $f_0 + \Psi_C$ mediante $(f_0 + \Psi_C)(x) := f_0(x) + \Psi_C(x)$, y es directo verifcar que

$$\inf_{x \in C} f_0(x) = \inf_{x \in X} (f_0 + \Psi_C).$$

De esta forma, el problema de minimización (2.0.1) puede formularse de manera equivalente como

$$\inf_{x \in X} f(x),$$

donde $f : X \longrightarrow I\!R \cup \{+\infty\}$ está defnida por $f = f_0 + \Psi_C$. Esto permite considerar las restricciones de manera implícita en la defnición de f y dar así un tratamiento unificado a este tipo de problemas.

2.1 Funciones convexas

Definición 2.1.1. Una función $f : X \longrightarrow \overline{I\!R}$ definida sobre un evn X es *convexa* si

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \quad \forall\ x,\ y \in X,\ \forall\ \alpha \in [0,1],$$

y *estrictamente convexa* si

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) < \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \quad \forall\ x,\ y \in X,\ \forall\ \alpha \in]0,1[.$$

La función es *semicontinua inferior (sci)* para una cierta topología τ en $\bar{x} \in \operatorname{dom} f := \{x \in X\ :\ f(x) < +\infty\}$ si para toda sucesión $x_k \to_\tau \bar{x}$ (convergencia según la topología) se tiene

$$f(x) \leq \liminf_{k\to\infty} f(x_k).$$

Si la topología τ es la topología inducida por la norma (topología fuerte) diremos simplemente que f es sci.

La función f es *coerciva* si

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Finalmente, la función f se dice *propia* si f no toma nunca el valor $-\infty$ y existe $x \in X$ tal que $f(x) < +\infty$. El conjunto de las funciones convexas, sci y propias definidas sobre el evn X será denotado por $\Gamma_0(X)$.

Observe que si $f_0 : X \longrightarrow I\!R$ es una función convexa sci y $C \subset X$ es un conjunto convexo cerrado no vacío, entonces la función $f : X \longrightarrow I\!R \cup \{+\infty\}$ definida por

$$f = f_0 + \Psi_C$$

es una función convexa sci y propia.

El epigrafo de una función $f : X \longrightarrow \overline{I\!R}$ está definido por

$$\operatorname{epi} f := \{(x,r) \in X \times I\!R\ :\ f(x) \leq r\}.$$

Este conjunto del espacio producto es muy útil ya que nos permite trabajar con funciones y conjuntos indistintamente debido a las siguientes equivalencias.

Proposición 2.1.1. *Sea $f : X \longrightarrow \overline{I\!\!R}$ definida sobre un evn X. Entonces, se tiene que*

- *f es convexa si y sólamente si (ssi)* epi f *es un conjunto convexo en el espacio producto $X \times I\!\!R$;*
- *f es sci para la topología τ si y sólamente si (ssi)* epi f *es un conjunto cerrado en el espacio producto $X \times I\!\!R$, donde X está dotado de la topología τ;*
- *f es propia ssi* epi f *es un conjunto no vacío.*

Demostración. Propuesto. $\square$

Observación 2.1.1. Si la función $f : X \longrightarrow I\!\!R \cup \{+\infty\}$ es convexa y semicontinua inferior (sci) (para la topología fuerte) entonces, por el resultado anterior se tiene que epi f es un conjunto convexo cerrado (para la topología fuerte). Debido a la Observación 1.1.1 deducimos que epi f es cerrado para la topología débil en $X \times I\!\!R$. Así, por la Proposición 2.1.1, se demuestra que f será también semicontinua inferior (sci) para la topología débil, es decir, para todo $x \in \operatorname{dom} f$ y para toda sucesión x_k convergiendo débil a x, se tiene

$$f(x) \leq \liminf_{k\to\infty} f(x_k).$$

Dada una función $f : X \longrightarrow I\!\!R \cup \{+\infty\}$, si consideramos el problema de optimización

$$(P) \qquad \inf_{x\in X} f(x)$$

se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 2.1.1. *Si el evn X es un espacio reflexivo y la función f es convexa, sci, propia y coerciva, entonces existe $\bar{x}$ tal que*

$$f(\bar{x}) = \inf_{x\in X} f(x).$$

Si además, f es estrictamente convexa, entonces el minimizador $\bar{x}$ es único.

Demostración. Dado que f es propia, entonces existe $x_0 \in X$ tal que $\gamma := f(x_0) < +\infty$. Sea x_k una sucesión minimizante del problema de minimización, es decir,

$$f(x_k) \to \inf_{x\in X} f(x).$$

Esta sucesión existe ya que como $\inf_{x\in X} f(x) \leq \gamma$, podrían ocurrir dos casos: si

$$\inf_{x\in X} f(x) > -\infty$$

para cada $k \in \mathbb{N}$ existe x_k tal que (de la definición de ínfimo)

$$\inf_{x \in X} f(x) \leq f(x_k) \leq \inf_{x \in X} f(x) + 1/k.$$

Si $\inf_{x \in X} f(x) = -\infty$ (más adelante veremos que esto no ocurre) tomamos x_k tal que $f(x_k) \leq -k + \gamma + 1$. Así, se observa que (en cualquiera de los dos casos)

$$x_k \in M := \{x \in X \ : \ f(x) \leq \gamma + 1\} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Debido a que f es convexa y sci es fácil probar que el conjunto M es convexo y cerrado. Por otro lado, dado que f es coerciva, se tendrá que M es acotado. De hecho, si existe una sucesión $y_k \in M$ con $\|y_k\| \to +\infty$ por la coercividad obtendríamos $f(y_k) \to +\infty$ lo que no puede ser ya que $y_k \in M$. Por lo tanto el conjunto M es cerrado y acotado y como X es un espacio reflexivo, M será compacto para la topología débil. Así, existe una subsucesión de x_k (que notaremos igual) que converge débil a un elemento $\bar{x} \in X$. Concluímos pues la función f es sci para la topología débil (ver Observación 2.1.1) y por lo tanto

$$\inf_{x \in X} f(x) \leq f(\bar{x}) \leq \liminf_{k \to \infty} f(x_k) = \lim_{k \to \infty} f(x_k) = \inf_{x \in X} f(x).$$

Además, como f es propia, se tiene

$$-\infty < \inf_{x \in X} f(x) = f(\bar{x}).$$

Si f es estrictamente convexa, supongamos $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$ tales que

$$f(\bar{x}_1) = \inf_{x \in X} f(x) = f(\bar{x}_2).$$

Sea $\bar{z} := 1/2(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)$. De la definición de estricta convexidad obtenemos

$$f(\bar{z}) < 1/2(f(\bar{x}_1) + f(\bar{x}_2)) = \inf_{x \in X} f(x),$$

lo que es una contradicción. $\square$

Observación 2.1.2. El resultado anterior puede ser extendido, en cierta forma, cuando f no es convexa. De hecho, siguiendo los pasos de la demostración precedente, se prueba lo mismo si la función f es sci para la topología débil y es coerciva.

Veamos ahora un resultado que se obtiene como aplicación directa de las equivalencias dadas en la Proposición 2.1.1.

Proposición 2.1.2. *Sea $f_\lambda : X \longrightarrow I\!R \cup \{+\infty\}$ una familia de funciones convexas, sci, propias indexadas por $\lambda \in \Lambda$. Entonces se tiene que la función definida por*

$$f(x) = \sup_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(x) \tag{2.1.1}$$

también es convexa y sci.

Demostración. Basta notar que el epigrafo de la función f definida por (2.1.1) es la intersección de los epigrafos, es decir,

$$\operatorname{epi} f = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \operatorname{epi} f_\lambda \in X \times I\!R.$$

Aplicando las proposiciones 1.1.1 y 2.1.1 se deduce el resultado. □

El resultado anterior puede ser presentado de forma más general, de hecho, veremos a continuación que toda función convexa, sci y propia puede ser expresada como el supremo de funciones lineales afines. Esto último es una consecuencia directa del Teorema de separación de Hahn-Banach 1.1.1.

Teorema 2.1.2. *Sea $f : X \longrightarrow I\!R \cup \{+\infty\}$ una función convexa, sci y propia ($f \in \Gamma_0(X)$), entonces existe un conjunto $\mathcal{M} \subset X^* \times I\!R$ tal que*

$$f(x) = \sup_{(z^*, \alpha) \in \mathcal{M}} \langle x, z^* \rangle - \alpha \qquad \forall\, x \in X. \tag{2.1.2}$$

Demostración. Sea $\mathcal{M}$ el conjunto del espacio producto $X^* \times I\!R$ definido por (también llamado conjunto de lineales afines minorantes)

$$(x^*, \alpha) \in \mathcal{M} \Leftrightarrow\ \langle x, z^* \rangle - \alpha \leq f(x)\ \ \forall\, x \in X.$$

Notemos que $\mathcal{M} \neq \emptyset$, de hecho, como $\operatorname{epi} f \subset X \times I\!R$ es un conjunto convexo cerrado no vacío (pues $f \in \Gamma_0(X)$) se tiene que (ver Corolario 1.1.1)

$$\operatorname{epi} f = \bigcap_{(z^*, s, \alpha) \in \mathcal{F}} \mathcal{H}_{(z^*, s), \alpha},$$

donde $\mathcal{H}_{(z^*, s), \alpha}$ es el semiespacio cerrado en el espacio producto $X \times I\!R$ definido por

$$\mathcal{H}_{(z^*, s), \alpha} = \{(x, r) \in X \times I\!R\ :\ \langle x, z^* \rangle + rs \leq \alpha\},$$

y $\mathcal{F} \subset X^* \times I\!R \times I\!R$ es la familia de semiespacios que contiene $\operatorname{epi} f$, es decir,

$$(z^*, s, \alpha) \in \mathcal{F}\ \Leftrightarrow\ \operatorname{epi} f \subset H_{(z^*, s), \alpha}.$$

Primero veamos que si $(z^*, s, \alpha) \in \mathcal{F}$ entonces $s \leq 0$, de hecho

$$(z^*, s, \alpha) \in \mathcal{F} \Rightarrow \ \langle x, z^* \rangle + sr \leq \alpha \quad \forall (x, r) \in \operatorname{epi} f.$$

Si $s > 0$ tomando $x \in \operatorname{dom} f$ y r suficientemente grande la desigualdad anterior es falsa. Ahora, si para todo elemento (z^*, s, α) en $\mathcal{F}$ se tiene $s = 0$, entonces

$$\operatorname{epi} f = \bigcap_{(z^*, s, \alpha) \in \mathcal{F}} \{(x, r) \in X \times I\!R \ : \ \langle x, z^* \rangle \leq \alpha\},$$

lo que implica que si $(x, r) \in \operatorname{epi} f$ se tendrá $(x, r - n) \in \operatorname{epi} f$ para todo $n \in \mathbb{N}$ lo cual induce a una contradicción, por lo tanto debe existir $(z^*, s, \alpha) \in \mathcal{F}$ con $s < 0$. Sin pérdida de generalidad supondremos (haciendo una normalización) $s = -1$. Así, se tiene que

$$\operatorname{epi} f \subset H_{(z^*, -1), \alpha}$$

lo que implica

$$\langle x, z^* \rangle - r \leq \alpha \qquad \forall\ (x, r) \in \operatorname{epi} f$$

y por lo tanto

$$\langle x, z^* \rangle - \alpha \leq f(x) \qquad \forall\ x \in X$$

mostrando asi que $\mathcal{M} \neq \emptyset$ ($(z^*, \alpha) \in \mathcal{M}$).

Mostremos ahora la igualdad (2.1.2). Claramente

$$f(x) \geq \sup_{(z^*, \alpha) \in \mathcal{M}} \langle x, z^* \rangle - \alpha \qquad \forall\ x \in X.$$

Para probar la desigualdad contraria, utilicemos el Teorema de separación de Hahn-Banach 1.1.1. Sea $x_0 \in X$ y $r \in \mathbb{R}$ tal que $r_0 < f(x_0)$, es decir, $(x_0, r_0) \notin \operatorname{epi} f$. Como el epigrafo de f es un conjunto convexo, cerrado, no vacío se tiene que existe $(z^*, s, \alpha) \in X^* \times I\!R \times I\!R$ no nulo tal que

$$\langle x, z^* \rangle + rs \leq \alpha \ \ \forall\ (x, r) \in \operatorname{epi} f \quad \text{y} \quad \langle x_0, z^* \rangle + r_0 s > \alpha. \tag{2.1.3}$$

Por un argumento utilizado anteriormente, se deduce $s \leq 0$.

Veamos el caso $f(x_0) < +\infty$. En esta situación se tendrá que $s < 0$, pues si $s = 0$ tomamos $(x_0, f(x_0)) \in \operatorname{epi} f$ y por (2.1.3) se deduce

$$\langle x_0, z^* \rangle \leq \alpha < \langle x_0, z^* \rangle$$

lo que es absurdo. Sin pérdida de generalidad (otra vez) suponemos $s = -1$. De la relación (2.1.3) deducimos (notar que $(x, f(x)) \in \operatorname{epi} f$)

$$\langle x, z^* \rangle - \alpha \leq f(x) \qquad \forall x \in X$$

y por lo tanto $(z^*, \alpha) \in \mathcal{M}$. Además, de la segunda parte de (2.1.3)

$$\sup_{(z^*,\alpha)\in\mathcal{M}} \langle x_0, z^*\rangle - \alpha \geq \langle x_0, z^*\rangle - \alpha > r_0$$

para todo $r_0 < f(x_0)$ demostrando así

$$\sup_{(z^*,\alpha)\in\mathcal{M}} \langle x_0, z^*\rangle - \alpha \geq f(x_0).$$

El caso $f(x_0) = +\infty$ es dejado como ejercicio. $\square$

2.2 Conjuda de Fenchel

En esta sección veremos un concepto muy importante en Análisis Convexo, optimización y otras áreas de las matemáticas aplicadas (tratamiento de imágenes por ejemplo).

Definición 2.2.1. Sea la función $f : X \longrightarrow I\!R \cup \{+\infty\}$. La *conjuda de Fenchel* de la función f es la función $f^* : X^* \longrightarrow I\!R \cup \{+\infty\}$ definida por

$$f^*(x^*) := \sup_{x\in X} \langle x, x^*\rangle - f(x).$$

Recordemos que los espacios X y X^* se consideran como espacios en dualidad (detalles ver [1]), así la conjugada de $g : X^* \longrightarrow I\!R \cup \{+\infty\}$ es $g^* : X \longrightarrow I\!R \cup \{+\infty\}$ definida por

$$g^*(x) := \sup_{x^*\in X^*} \langle x^*, x\rangle - g(x^*).$$

Observe que la función $f^* : X^* \longrightarrow I\!R \cup \{+\infty\}$ es convexa, semicontinua inferior (sci) y propia ($f^* \in \Gamma_0(X^*)$) debido a que es el supremo de funciones lineales continuas afines.

Proposición 2.2.1. *Considere la función $f : X \longrightarrow I\!R \cup \{+\infty\}$. f es función convexa, sci y propia ($f \in \Gamma_0(X)$) sí y sólo si*

$$f^{**}(x) = \sup_{x^*\in X^*} \langle x^*, x\rangle - f^*(x^*) = f(x).$$

Demostración. Es directo mostrar que la función f^{**} es convexa, sci y propia. Por otro lado, de las definiciones, no es difícil ver que siempre se tiene $f^{**} \leq f$. La igualdad proviene del hecho que f, por pertenecer a $\Gamma_0(X)$, es el supremo de todas las minorantes afines (Teorema 2.1.2), es decir,

$$f(x) = \sup\{\langle x, x^*\rangle - \alpha \ : \ \langle y, x^*\rangle - \alpha \leq f(y) \ \ \forall\, y \in X\}. \tag{2.2.1}$$

Si se fija un elemento $x^* \in X^*$ y se hace variar α tal que $\langle \cdot, x^*\rangle - \alpha \leq f(\cdot)$ se observa que el mejor α que se podría obtener es

$$\alpha = \sup_{y\in X}\langle y, x^*\rangle - f(y) = f^*(x^*),$$

pudiendo ser eventualmente $+\infty$ (dependerá de x^*). Esto más la expresión (2.2.1) prueban el resultado deseado. $\square$

Ejemplo 2.2.1. Sea $X = I\!R$ y la función f definida por $f(x) = e^x$, pruebe que

$$f^*(x^*) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \ x^* < 0 \\ 0 & \text{si } \ x^* = 0 \\ x^*(\ln x^* - 1) & \text{si } \ x^* > 0. \end{cases}$$

Ejemplo 2.2.2. Sea X un espacio de Hilbert y $f(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$. Mostremos que

$$f^*(x^*) = \frac{1}{2}\|x^*\|^2 = f(x^*).$$

Demostración. Dado $x^* \in X^* = X$, considere la función diferenciable

$$g(x) = \langle x, x^*\rangle - \frac{1}{2}\|x\|^2.$$

El elemento $\bar{x}$ donde se maximiza la función g satisface

$$\nabla g(\bar{x}) = x^* - \bar{x} = 0.$$

Por lo tanto $f^*(x^*) = g(\bar{x}) = \frac{1}{2}\|x^*\|^2$. $\square$

Ejemplo 2.2.3 *(Se requiere de conocimientos en espacios de Sobolev, ver [3]).* Sea Ω un conjunto abierto acotado y no vacío de $I\!R^n$. Considere el espacio de Hilbert $X = L^2(\Omega)$ de las función a cuadrado integrable, es decir,

$$L^2(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow I\!R \ \mid \ \int_\Omega u^2(x)dx < +\infty \right\}.$$

Como X es un Hilbert su dual topológico X^* lo identificaremos con el mismo, asi, el producto de dualidad (producto interno en $X = L^2(\Omega)$) estará dado por

$$\langle u, u^*\rangle_{L^2(\Omega),L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)u^*(x)dx \qquad u, \ u^* \in L^2(\Omega)$$

inducienda la norma

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega u^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Sea la función $f : X \longrightarrow I\!R \cup \{+\infty\}$ definida por

$$f(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int\limits_\Omega \|\nabla u(x)\|^2 dx & \text{si } u \in H^1(\Omega) \\ \\ +\infty & \text{si } u \notin H^1(\Omega) \end{cases}$$

donde $H^1(\Omega)$ es el conjunto de las funciones en X con derivada (en el sentido de las distribuciones) a cuadrado integrable. Es directo ver que f es una función convexa y propia. Probemos primero que f es sci. Sea $\bar{u} \in H^1(\Omega) = \operatorname{dom} f$ y tomemos $u_k \to \bar{u}$ (con la topologia de la norma en $X = L^2(\Omega)$. Debemos demostrar que

$$f(\bar{u}) \leq \liminf_{k\to\infty} f(u_k).$$

El caso no trivial es cuando $\liminf\limits_{k\to\infty} f(u_k) < +\infty$. En este caso se tendrá que existe $M > 0$ tal que

$$f(u_k) = \frac{1}{2} \int_\Omega \|\nabla u_k(x)\|^2 dx \leq M \qquad \forall k \geq 0. \tag{2.2.2}$$

Como u_k es una suseción acotada en X (es convergente) se tiene por (2.2.2) que será acotada en $H^1(\Omega)$ y por lo tanto existe una subsucesión convergente que converge débil a un elemento $\bar{w} \in H^1(\Omega)$ (este espacio es reflexivo) como u_k converge fuerte a $\bar{u}$ en X se deduce $\bar{w} = \bar{u}$.

Por otro lado, si consideramos la función $J : H^1(\Omega) \longrightarrow I\!R$ definida por

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega \|\nabla u(x)\|^2 dx$$

se observa que J es convexa y continua (para la topología fuerte en $H^1(\Omega)$). De la Observación 2.1.1 se deduce que el funcional J es sci para la topología débil y como $f = J$ sobre $H^1(\Omega)$ se obtiene

$$f(\bar{u}) = J(\bar{u}) \leq \liminf_{k\to\infty} J(u_k) = \liminf_{k\to\infty} f(u_k),$$

debido a que una subsucesión de u_k converge débil a $\bar{u}$ en $H^1(\Omega)$.

Calculemos ahora f^*. De la definición escribimos

$$f^*(v) = \sup_{u \in L^2(\Omega)} \int_\Omega v(x)u(x)dx - f(u) =$$

$$\sup_{u\in H^1(\Omega)} \int_\Omega v(x)u(x)dx - \frac{1}{2}\int_\Omega \|\nabla u(x)\|^2 dx = -\inf_{u\in H^1(\Omega)} \frac{1}{2}\int_\Omega \|\nabla u(x)\|^2 dx - \int_\Omega v(x)u(x)dx.$$

Observamos que la expresión anterior es la formulación variacional de la siguiente EDP

$$\begin{cases} -\triangle u = v & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Por lo tanto, si u_v es la solución en $H^1(\Omega)$ de dicha EDP, entonces

$$f^*(v) = \int_\Omega v(x)u_v(x)dx - \frac{1}{2}\int_\Omega \|\nabla u_v(x)\|^2 dx.$$

2.3 Subdiferencial convexo

Sea $f : X \longrightarrow I\!R \cup \{+\infty\}$ una función convexa y $x \in \operatorname{dom} f = \{z \in X \ : \ f(z) < +\infty\}$. Diremos que $x^* \in X^*$ es un *subgradiente* de f en x si

$$f(x) + \langle y - x, x^*\rangle \leq f(y) \qquad \forall\, y \in X.$$

Denotaremos por $\partial f(x) \subset X^*$ el conjunto de todos los subgradientes de f en $x \in \operatorname{dom} f$. El conjunto

$$\partial f(x) = \{x^* \in X^* \ : \ f(x) + \langle y - x, x^*\rangle \leq f(y) \quad \forall\, y \in X\},$$

es llamado el *subdiferencial* de f en $x \in \operatorname{dom} f$.

Proposición 2.3.1. *Un elemento $\bar{x} \in X$ es un mínimo global de f (i.e. $f(\bar{x}) \leq f(x)\ \ \forall\, x \in X$) sí y solamente si $0 \in \partial f(\bar{x})$.*

Demostración. Es directo de la definición del subdiferencial ∂f. □

Proposición 2.3.2. *Si la función convexa $f : X \longrightarrow I\!R \cup \{+\infty\}$ es diferenciable en $x \in X$ entonces $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$.*

Demostración. Es fácil mostrar que si f es diferenciable entonces $\nabla f(x) \in \partial f(x)$. De hecho, una propiedad de las funciones convexas diferenciables es

$$f(x) + \langle y - x, \nabla f(x)\rangle \leq f(y) \quad \forall\, y \in X, \tag{2.3.1}$$

pues

$$f(ty + (1-t)x) = f(x + t(y - x)) \leq tf(y) + (1-t)f(x)$$

para t pequeño. Esto implica

$$f(x) + t^{-1}[f(x + t(y - x)) - f(x)] \leq f(y)$$

y haciendo tender $t \to 0$ se obtiene la expresión (2.3.1). Sea ahora $x^* \in \partial f(x)$. De la definición de subgradiente se tiene

$$g(x) := f(x) + \langle x, x^* \rangle \leq f(y) + \langle y, x^* \rangle = g(y) \qquad \forall\, y \in X,$$

es decir, la función diferenciable g se minimiza en x, por lo tanto

$$\nabla g(x) = \nabla f(x) - x^* = 0$$

obteniendo así el resultado.

□

Proposición 2.3.3. *Para todo elemento en $x \in X$ el conjunto $\partial f(x) \subset X^*$ es convexo y cerrado para la topología $*$-débil.*

Demostración. Observamos que el subdiferencial $\partial f(x)$ es una intersección de semiespacios cerrados para la topología $*$-débil, de hecho

$$\begin{aligned} \partial f(x) &= \{x^* \in X^* \ :\ f(x) + \langle y - x, x^* \rangle \leq f(y) \quad \forall\, y \in X\} \\ &= \bigcap_{y \in X} \{x^* \in X^* \ :\ \langle y - x, x^* \rangle \leq f(y) - f(x)\}, \end{aligned}$$

donde un elemento en X es entendido como un funcional lineal continuo (para la topología $*$-débil) definido sobre X^*. □

Proposición 2.3.4. *Para una función convexa $f : X \longrightarrow I\!R \cup \{+\infty\}$ se tiene que $x^* \in \partial f(x)$ sí y solamente si*

$$f(x) + f^*(x^*) = \langle x, x^* \rangle.$$

Demostración. La desigualdad

$$f(x) + f^*(x^*) \geq \langle x, x^* \rangle$$

siempre es cierta para cualquier elemento en X^* debido a la definición de f^*. Esta es conocida como la *desigualdad de Fenchel*. Por otro lado, si $x^* \in \partial f(x)$ entonces

$$f(x) + \langle y - x, x^* \rangle \leq f(y) \quad \forall\, y \in X \Rightarrow\ f^*(x^*) = \sup_{y \in X} \langle y, x^* \rangle - f(y) \leq \langle x, x^* \rangle - f(x).$$

□

Ejemplo 2.3.1. Sea X un espacio de Hilbert y f la función definida por $f(x) = \|x\|$, entonces

$$\partial f(x) = \begin{cases} \{x/\|x\|\} & \text{si } \ x \neq 0 \\ B_X & \text{si } \ x = 0 \end{cases}$$

donde $B_X = \{z \in X \ : \ \|z\| \leq 1\}$ es la bola unitaria en X.

Demostración. El caso $x \neq 0$ se obtiene mediante la Proposición 2.3.2 ya que $f(\cdot) = \|\cdot\|$ es diferenciable en $X \setminus \{0\}$ (esto es cierto en todo evn reflexivo). Sea $x^* \in \partial f(0)$, de la definición de subgradiente observamos que

$$\langle y, x^* \rangle \leq \|y\| \qquad \forall\, y \in X \Rightarrow \ \|x^*\|_* = \sup_{\substack{y \in X \\ \|y\| \leq 1}} \langle y, x^* \rangle \leq 1.$$

□

La siguiente proposición permite calcular el operador inverso del subdiferencial de una función convexa.

Proposición 2.3.5. *Para una función $f : X \longrightarrow I\!R \cup \{+\infty\}$ en $\Gamma_0(X)$ (convexa, sci y propia) se tiene que*

$$x^* \in \partial f(x) \Leftrightarrow \ x \in \partial f^*(x^*).$$

Demostración. De la Proposición 2.3.4 y recordando que $f = f^{**}$ obtenemos

$$x^* \in \partial f(x) \Leftrightarrow \ f(x) + f^*(x^*) = \langle x, x^* \rangle$$

$$\Leftrightarrow \ f^{**}(x) + f^*(x^*) = \langle x, x^* \rangle \Leftrightarrow \ x \in \partial f^*(x^*).$$

□

La proposición anterior es una extensión de un resultado obtenido por Legendre. El ya se había percatado que el operador inverso del gradiente de una función convexa correspondía al gradiente de otra función convexa.

Proposición 2.3.6. *Para una función $f : X \longrightarrow I\!R \cup \{+\infty\}$ convexa se cumplen las siguientes dos propiedades:*

(a) $\partial f(x) \neq \emptyset \Rightarrow \ f(x) = f^{**}(x)$

(b) $f(x) = f^{**}(x) \Rightarrow \ \partial f(x) = \partial f^{**}(x)$.

Demostración. Siempre se tiene $f \geq f^{**}$ (incluso si f no es convexa) debido a la desigualdad de Fenchel. Por otro lado, si $x^* \in \partial f(x)$ entonces $f(x) + \langle \cdot - x, x^* \rangle$ es una función lineal afin de f^* y como f^{**} es el supremo de todas las minorantes afines de f^* obtenemos

$$f^{**}(\cdot) \geq f(x) + \langle \cdot - x, x^* \rangle.$$

Evaluando en x se concluye $f^{**}(x) \geq f(x)$. Para demostrar la segunda parte, sea $f(x) = f^{**}(x)$ y $x^* \in \partial f(x)$, esto es equivalente (por la Proposición 2.3.4) a

$$f(x) + f^*(x^*) = \langle x, x^* \rangle \Leftrightarrow \; f^{**}(x) + f^*(x^*) = \langle x, x^* \rangle.$$

Debido a que f^* es convexa, sci y propia, por la Propiedad 2.2.1 se tiene que $f^* = (f^*)^{**}$. Asi,

$$f^{**}(x) + (f^*)^{**}(x^*) = \langle x, x^* \rangle$$

lo que es equivalente a decir (por la Proposición 2.3.4) $x^* \in \partial f^{**}(x)$. $\square$

Observando los pasos seguidos en la demostración anterior se deduce que siempre $\partial f(x) \subset \partial f^{**}(x)$.

CAPÍTULO 3

Dualidad vía perturbaciones

3.1 Problemas perturbados

Sea X un espacio vectorial normado (evn) y $f : X \longrightarrow I\!R \cup \{+\infty\}$ una función convexa semicontinua inferior (sci) y propia ($f \in \Gamma_0(X)$). Consideremos el problema de optimización siguiente:

$$(P) \quad \min_{x \in X} f(x).$$

Al problema (P) lo llamaremos problema *primal*.

Supongamos que el problema (P) esta inmerso en una familia de problemas de optimización

$$(P_y) \quad v(y) = \min_{x \in X} \phi(x, y), \tag{3.1.1}$$

donde $y \in Y$ (evn llamado *espacio de perturbaciones*) y $\phi : X \times Y \longrightarrow I\!R \cup \{+\infty\}$ es una función convexa, sci y propia ($\phi \in \Gamma_0(X \times Y)$) tal que

$$\phi(\cdot, 0) = f(\cdot).$$

Ahora, consideremos la función conjugada de ϕ

$$\phi^* : X^* \times Y^* \longrightarrow I\!R \cup \{+\infty\}$$

a la cual le asociamos la familia de problemas

$$w(x^*) = \min_{y^* \in Y^*} \phi^*(x^*, y^*).$$

Llamaremos *problema dual* asociado al problema primal (P) a

$$w(0) = \min_{y^* \in Y^*} \phi^*(0, y^*).$$

Observe que al problema (D) podemos a su vez asociarle su problema dual utilizando la conjugada de ϕ^* la cual resultará ser ϕ, es decir, el problema dual de (D) es el problema primal (P) (bidual $\equiv$ primal).

Proposición 3.1.1. *La* función valor $v : Y \longrightarrow I\!R \cup \{+\infty\}$ *definida por* (3.1.1) *es convexa.*

Demostración. Propuesto. $\square$

Notemos que la función conjugada (de Fenchel) de la función valor $v : Y \longrightarrow I\!R \cup \{+\infty\}$ definida por (3.1.1) está dada por

$$v^*(y^*) = \sup_{y \in Y} \langle y, y^* \rangle_{Y,Y^*} - v(y) = \sup_{y \in Y} \langle y, y^* \rangle_{Y,Y^*} - \inf_{x \in X} \phi(x, y)$$

$$= \sup_{y \in Y} \langle y, y^* \rangle_{Y,Y^*} + \sup_{x \in X} -\phi(x, y) = \sup_{y \in Y} \sup_{x \in X} \langle y, y^* \rangle_{Y,Y^*} + \langle x, 0 \rangle_{X,X^*} - \phi(x, y) = \phi^*(0, y^*),$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X,X^*}$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_{Y,Y^*}$ son los pares de dualidad entre los espacios (X, X^*) e (Y, Y^*). Durante el resto del apunte notaremos simplemente $\langle \cdot, \cdot \rangle$ siempre y cuando no exista confusión.

3.2 Teoremas de dualidad

Consideremos α y β los valores de los problemas primal y dual respectivamente, es decir,

$$(P) \qquad \alpha := \min_{x \in X} \phi(x, 0) \tag{3.2.1}$$

y

$$(D) \qquad \beta := \min_{y^* \in Y^*} \phi^*(0, y^*), \tag{3.2.2}$$

donde $\phi \in \Gamma_0(X \times Y)$ con $\phi(\cdot, 0) = f(\cdot) \in \Gamma_0(X)$. Recordemos que las funciones valor están dadas por

$$v(y) = \min_{x \in X} \phi(x, y) \quad \text{y} \quad w(x^*) = \min_{y^* \in Y^*} \phi^*(x^*, y^*),$$

que pueden tomar valores en $\overline{I\!R}$. Vimos que $v(\cdot)$ es una función convexa y que

$$v^*(\cdot) = \phi^*(0, \cdot).$$

Lo mismo se puede demostrar para la función valor w, es decir, w también es una función convexa y $w^*(x) = \phi(x,0) = f(x)$. Así los problemas primal y dual pueden ser escritos de la siguiente forma

$$(P) \quad \min_{x \in X} w^*(x) \tag{3.2.3}$$

y

$$(D) \quad \min_{y^* \in Y^*} v^*(y^*). \tag{3.2.4}$$

A continuación veremos dos resultados que relacionan los valores de los problemas primal y dual. El primero de ellos es conocido como el *Teorema de dualidad abstracta*. Para ello notaremos por $S(P)$ y $S(D)$ los conjunto soluciones de los problemas primal y dual respectivamente, es decir, si $\bar{x} \in S(P)$ entonces $f(\bar{x}) \leq f(x)$ para todo $x \in X$.

Teorema 3.2.1. *Si $\partial v(0) \neq \emptyset$ entonces*

1. $\alpha = -\beta$
2. $S(D) = \partial v(0)$.

Equivalentemente, se obtiene que si $\partial w(0) \neq \emptyset$, entonces

1. $\alpha = -\beta$
2. $S(P) = \partial w(0)$.

Demostración. De la primera parte de la Proposición 2.3.6 se tiene que si $\partial v(0) \neq \emptyset$ entonces $\alpha = v(0) = v^{**}(0)$. Además,

$$\alpha = v^{**}(0) = \sup_{y^* \in Y^*} \langle 0, y^* \rangle - v^*(y^*) = - \inf_{y^* \in Y^*} v^*(y^*) = -\beta.$$

Por otro lado, dado que $v(0) = v^{**}(0)$, de la segunda parte de la Proposición 2.3.6 se tiene $\partial v(0) = \partial v^{**}(0)$. Si $y^* \in S(D)$ de la Proposición 2.3.1 y de la expresión del problema dual (3.2.4) se deduce $0 \in \partial v^*(y^*)$ y dado que $v^* \in \Gamma_0(Y^*)$ de la Proposición 2.3.4 y 2.3.6 concluímos

$$y^* \in \partial v^{**}(0) = \partial v(0).$$

La demostración de la segunda parte del teorema es análoga a la anterior. $\square$

El teorema anterior nos da una caracterización del conjunto de soluciones del problema dual $S(D)$ además de una relación entre los valores de los problemas primal y dual. Ahora veremos un resultado similar, conocido como el *Teorema de dualidad práctico*, con una hipótesis, a priori, más fácil de verificar. Para esto necesitaremos los teoremas que damos a continuación y cuyas demostraciones pueden ser vistas en [1].

Antes, recordemos que una función $f : X \longrightarrow I\!R \cup \{+\infty\}$ es localmente acotada en $x \in \operatorname{dom} f$ si existe una vecindad V_x de x y $R \in I\!R$ tal que

$$f(y) \leq R \quad \forall\, y \in V_x.$$

Por otro lado, la función f será localmente Lipschitz en $x \in \operatorname{dom} f$ (y por lo tanto continua en x) si existe una vecindad V_x de x y una constante $L > 0$ (que depende de x) tal que

$$|f(y) - f(y')| \leq L\|y - y'\| \qquad \forall\, y,\ y' \in V_x.$$

Teorema 3.2.2. *Si $f : X \longrightarrow I\!R \cup \{+\infty\}$ es un función convexa, entonces f es localmente acotada en $x \in \operatorname{dom} f$ sí y sólo si f es localmente Lipschitz en x.*

Demostración. Ver [1] Teorema 2.1.1. □

Teorema 3.2.3. *Si $f : X \longrightarrow I\!R \cup \{+\infty\}$ es convexa, finita y continua en $x \in X$ entonces $\partial f(x) \neq \emptyset$.*

Demostración. Ver [1] Teorema 2.4.1. □

Teorema 3.2.4. *Consideremos el esquema de dualidad* (3.2.1) *y* (3.2.2) *asociado a la función $\phi \in \Gamma_0(X \times Y)$. Supongamos que existe $x_0 \in X$ tal que la función $\phi(x_0, \cdot)$ es finita y continua en $y = 0$. Entonces, $v(0) = \alpha = -\infty$, o se tiene*

1. $\alpha + \beta = 0$
2. $S(D) = \partial v(0) \neq \emptyset$

Demostración. Sea V un vecindad de $y = 0$ en el evn Y tal que

$$\phi(x_0, y) \leq \phi(x_0, 0) + 1 \qquad \forall\, y \in V.$$

Dado que $v(y) \leq \phi(x_0, y)$ se tendrá que la función convexa v es acotada en V (vecindad de cero en Y) y por el Teorema 3.2.2, $v(\cdot)$ es continua en $y = 0$. Si $v(0) > -\infty$, entonces por el Teorema 3.2.3 se tiene que $\partial v(0) \neq \emptyset$ y gracias al Teorema de la dualidad abstracto 3.2.1 concluímos ya que si $v(0)$ es finito entonces $\alpha + \beta = 0$.

□

La hipótesis del teorema de dualidad 3.2.4 se conoce como *condición de calificación primal*. Observe que siguiendo una demostración análoga a este teorema y utilizando la segunda parte del Teorema 3.2.1 se puede obtener un resultado con condiciones sobre la función $\phi^* \in \Gamma_0(X^* \times Y^*)$ en vez de la función ϕ. Dichas condiciones se conocen como *condición de calificación dual*.

Cuando se tiene $\alpha + \beta = 0$ se dice que no hay *salto de dualidad*, así, al resolver el problema primal (P) se estará resolviendo el problema dual (D) o viceversa. El caso $\alpha = -\infty$ es un caso patológico y se dice que el problema primal (P) es no acotado. Por otro lado, no es difícil mostrar que en tal caso, β resulta ser $+\infty$ y por lo tanto, el problema dual (D) es infactible.

CAPÍTULO 4

Aplicaciones

En este último capítulo son presentados dos ejemplos donde se aplican los resultados de la dualidad vistos en las unidades precedentes. El primero es el problema de programación lineal en dimensión finita y el segundo es el problema de Dirichlet.

4.1 Programación lineal

Sea $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ dotados del producto interno habitual (que notaremos de la misma manera)

$$\langle x, x' \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i x'_i \quad \forall\ x = (x_1, \ldots, x_n), \quad x' = (x'_1, \ldots, x'_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$\langle y, y' \rangle = \sum_{i=1}^{m} y_i y'_i \quad \forall\ y = (y_1, \ldots, y_m), \quad y' = (y'_1, \ldots, y'_m) \in \mathbb{R}^m,$$

y la norma Euclidiana inducida

$$\|x\|_n^2 = \langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \quad \forall\ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$\|y\|_m^2 = \langle y, y \rangle = \sum_{i=1}^{m} y_i^2 \quad \forall\ y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m.$$

Dado los vectores $c \in I\!R^n$, $b \in I\!R^m$ y la matriz $A \in M_{m\times n}$ (matrices de m filas y n columnas) se desea estudiar el problema de optimización

$$(P) \qquad \inf_{\substack{x\in I\!R^n \\ Ax\leq b}} \langle c, x\rangle$$

donde la desigualdad $Ax \leq b$ es componente a componente. El problema (P) es conocido como *programación lineal*.

Sea $X = I\!R^n$ e $Y = I\!R^m$. Consideremos la función $\phi : X \times Y \longrightarrow I\!R \cup \{+\infty\}$ definida por

$$\phi(x,y) = \begin{cases} \langle c, x\rangle & \text{si } \; Ax \leq b - y \\ +\infty & \qquad\qquad \text{si no.} \end{cases}$$

Observe que si $Ax \leq b$, entonces $\phi(0, x) = \langle c, x\rangle$.

Es directo mostrar que ϕ es convexa y semicontinua inferior (sci). Calculemos la conjugada de Fenchel de la función ϕ:

$$\phi^*(x^*, y^*) = \sup_{(x,y)\in X\times Y} \langle x, x^*\rangle + \langle y, y^*\rangle - \phi(x,y) = \sup_{\substack{(x,y)\in X\times Y \\ Ax\leq b-y}} \langle x, x^*\rangle + \langle y, y^*\rangle - \langle c, x\rangle.$$

Si existe una cordenada i de $y^* \in Y^* = I\!R^m$ negativa (i.e. $y_i^* < 0$), entonces tomando $x = 0$ y haciendo tender $y_i \to -\infty$ se obtiene que el supremo anterior es $+\infty$.

Supongamos $y^* \geq 0$ (i.e. $y_i^* \geq 0$ para todo i). En este caso se tiene que el mayor valor de $\langle y, y^*\rangle$ bajo la restricción $Ax \leq b - y$ se obtiene con $y = b - Ax$, por lo tanto

$$\phi^*(x^*, y^*) = \sup_{x\in X} \langle x, x^*\rangle + \langle b - Ax, y^*\rangle - \langle c, x\rangle = \sup_{x\in X} \langle x, x^* - A^*y^* - c\rangle + \langle b, y^*\rangle,$$

con A^* la matriz traspuesta de A. Si alguna coordenada del vector $x^* - A^*y^* - c$ es distinta de cero, el supremo anterior es $+\infty$ y por lo tanto

$$\phi^*(x^*, y^*) = \begin{cases} \langle b, y^*\rangle & \text{si } \; y^* \geq 0 \;\text{ y }\; A^*y^* + c = x^* \\ +\infty & \qquad\qquad\qquad\qquad \text{si no.} \end{cases}$$

Por lo anterior, el problema dual (D) asociado al problema primal (P) se escribe

$$(D) \qquad \inf_{y^*\in I\!R^m} \phi^*(0, y^*) = \inf_{\substack{y^*\in I\!R^m \\ A^*y^*+c=0 \\ y^*\geq 0}} \langle b, y^*\rangle.$$

Veamos ahora cómo se traduce la condición de calificación primal, es decir, qué significa que exista $x_0 \in X = I\!R^n$ tal que $\phi(x_0, \cdot)$ sea finita y continua en $y = 0 \in Y = I\!R^m$.

Directamente se observa que $\phi(x_0,\cdot)$ es finita y continua en cero sí y sólo si (ssi) $Ax_0 < b$. De hecho, el que $\phi(x_0,\cdot)$ sea finita en $y = 0$ es equivalente a $Ax_0 \leq b$. Si $Ax_0 = b$, restando una pequeña perturbación y al lado derecho tal que $Ax_0 > b-y$ se tendría $\phi(x_0, y) = +\infty$. Esto implica que $\phi(x_0,\cdot)$ no es continua en $y = 0$ (pasa de $\langle c, x_0\rangle$ a $+\infty$). Por lo tanto, el caso $Ax_0 < b$ nos asegura que para pequeñas perturbaciones se mantenga la condición $Ax_0 \leq b - y$ y así $\phi(x_0, y) = \langle c, x_0\rangle$ en una vecindad de cero (función continua). Esta condición ($\exists\ x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax_0 < b$) es conocida como la *condición de Slater*.

Aplicando el Teorema de la dualidad 3.2.4 deducimos que bajo la condición de Slater y si el problema primal (P) satisface

$$\inf_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ Ax\leq b}} \langle c, x\rangle > -\infty,$$

entonces

$$\inf_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ Ax\leq b}} \langle c, x\rangle + \inf_{\substack{y^*\in\mathbb{R}^m\\ A^*y^*+c=0\\ y^*\geq 0}} \langle b, y^*\rangle = 0 \tag{4.1.1}$$

y se tiene que el conjunto de soluciones del problema dual $S(D) = \partial v(0)$ es no vacío.

Por otro lado, observamos que la función valor del problema dual es dada por

$$w(x^*) := \inf_{\substack{y^*\in\mathbb{R}^m\\ A^*y^*+c=x^*\\ y^*\geq 0}} \langle b, y^*\rangle.$$

Se puede probar, gracias al Teorema 3.2.3 que, dada la particular estructura de $w(\cdot)$, se tiene $w(0) \in \mathbb{R} \Rightarrow \ \partial w(0) \neq \emptyset$. Así, debido a (4.1.1) y al Teorema de dualidad 3.2.1 probamos que el conjunto de soluciones del problema primal $S(P) = \partial w(0)$ es no vacío.

4.2 Problema de Dirichlet

Para estudiar el presente problema se recomienda revisar la literartura en Teoría de distribuciones y espacios de Sobolev [3].

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado. Consideraremos los siguientes espacios:

$$\begin{aligned}
L^2(\Omega) &= \left\{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \ \mid \ \int_\Omega u^2(x)dx < +\infty\right\}\\
L^2(\Omega)^n &= \{w = (w_1, \ldots, w_n) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n \ \mid \ w_i \in L^2(\Omega)\}\\
H_0^1(\Omega) &= \left\{u \in L^2(\Omega) \ \mid \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ existe (sentido débil) y está en } \ L^2(\Omega), \quad u = 0 \text{ en } \partial\Omega\right\}.
\end{aligned}$$

Observe que si $u \in H_0^1(\Omega)$ entonces el gradiente débil $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ está en $L^2(\Omega)^n$.

Las normas a utilizar son:

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^2(\Omega)} &= \left(\int_\Omega u^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
\|w\|_{L^2(\Omega)^n} &= \left(\sum_{i=1} \|w_i\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}} \\
\|u\|_{H_0^1(\Omega)} &= \left(\int_\Omega \|\nabla u(x)\|_2^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^n},
\end{aligned}$$

donde $\|\cdot\|_2$ es la norma Euclidiana en $\mathbb{R}^n$.

Dado que el evn $(L^2(\Omega), \|\cdot\|_{L^2(\Omega)})$ es un espacio de Hilbert, identificamos su dual con el mismo. Lo mismo para el evn $(L^2(\Omega)^n, \|\cdot\|_{L^2(\Omega)^n})$. El espacio dual del evn $(H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)})$ se denota por $H^{-1}(\Omega)$.

Los productos de dualidad entre los diferentes espacios y sus duales los notaremos $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2(\Omega),L^2(\Omega)}$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2(\Omega)^n,L^2(\Omega)^n}$ y $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H_0^1(\Omega),H^{-1}(\Omega)}$ donde

$$\begin{aligned}
\langle u, u^*\rangle_{L^2(\Omega),L^2(\Omega)} &= \int_\Omega u(x)u^*(x)dx \qquad u,\ u^* \in L^2(\Omega) \\
\langle w, w^*\rangle_{L^2(\Omega)^n,L^2(\Omega)^n} &= \sum_{i=1}^n \int_\Omega w_i(x)w_i^*(x)dx = \sum_{i=1}^n \langle w_i, w_i^*\rangle_{L^2(\Omega),L^2(\Omega)} \quad w,\ w^* \in L^2(\Omega)^n \\
\langle u, u^*\rangle_{H_0^1(\Omega),H^{-1}(\Omega)} &= \int_\Omega u(x)u^*(x)dx \qquad u \in H_0^1(\Omega),\ u^* \in H^{-1}(\Omega).
\end{aligned}$$

Recordemos que dados dos espacios vectoriales normados (evn) X e Y y un operador lineal continuo $A : X \longrightarrow Y$, su operador adjunto (que resulta ser lineal continuo) $A^* : Y^* \longrightarrow X^*$ está definido por

$$\langle x, A^*y^*\rangle_{X,X^*} = \langle Ax, y^*\rangle_{Y,Y^*} \quad \forall\ x \in X,\ y^* \in Y^*.$$

De esta forma, dado un operador continuo $A = (A_1, \ldots, A_n) : H_0^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)^n$ se define su operador adjunto $A^* : L^2(\Omega)^n \longrightarrow H^{-1}(\Omega)$ mediante la relación

$$\langle u^*, A^*w^*\rangle_{H_0^1(\Omega),H^{-1}(\Omega)} = \langle Au^*, w^*\rangle_{L^2(\Omega)^n,L^2(\Omega)^n} = \sum_{i=1}^n \int_\Omega A_i u^*(x)w^*(x)dx$$

para todo $w^* \in L^2(\Omega)^n$, $u^* \in H_0^1(\Omega)$.

Para el estudio de nuestro problema, supongamos $A : H_0^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)^n$ dado por $Au = \nabla u$ (operador lineal y continuo). El operador adjunto $A^* : L^2(\Omega)^n \longrightarrow H^{-1}(\Omega)$ estará dado por

$$\langle u^*, A^* w^* \rangle_{H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)} = \langle Au^*, w^* \rangle_{L^2(\Omega)^n, L^2(\Omega)^n} = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u^*}{\partial x_i}(x) w^*(x) dx$$

para todo $w^* \in L^2(\Omega)^n$, $u^* \in H_0^1(\Omega)$.

Integrando por partes, y recordando que si $u^* \in H_0^1(\Omega)$ entonces $u^* = 0$ en $\partial\Omega$, se obtiene

$$\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u^*}{\partial x_i}(x) w^*(x) dx = -\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial w^*}{\partial x_i}(x) u^*(x) dx = -\langle u^*, \text{ div } w^* \rangle_{H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)},$$

donde el funcional div $: L^2(\Omega)^n \longrightarrow H^{-1}(\Omega)$ está definido por

$$\text{div } w^* := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w^*}{\partial x_i} \in H^{-1}(\Omega) \qquad \forall\ w^* \in L^2(\Omega)^n.$$

Por todo lo anterior se tendrá que $A^* = -$ div .

Antes de pasar al problema propiamente tal calculemos una conjugada de Fenchel que nos será útil. Sean X e Y dos evn. Considere las funciones $F \in \Gamma_0(X)$ y $G \in \Gamma_0(Y)$. Para un operador lineal continuo $A : X \longrightarrow Y$ se define la función $\phi : X \times Y \longrightarrow I\!R \cup \{+\infty\}$ dada por

$$\phi(x, y) = F(x) + G(Ax + y).$$

Es directo probar que $\phi \in \Gamma_0(X \times Y)$. Calculemos ahora su conjugada

$$\phi^*(x^*, y^*) = \sup_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} \langle x, x^* \rangle_{X,X^*} + \langle y, y^* \rangle_{Y,Y^*} - F(x) - G(Ax + y).$$

Si hacemos el cambio de variable $z = Ax + y$ se tiene

$$\phi^*(x^*, y^*) = \sup_{\substack{x \in X \\ z \in Y}} \langle x, x^* \rangle_{X,X^*} + \langle z - Ax, y^* \rangle_{Y,Y^*} - F(x) - G(z)$$

$$= \sup_{\substack{x \in X \\ z \in Y}} \langle x, x^* \rangle_{X,X^*} + \langle z, y^* \rangle_{Y,Y^*} - \langle x, A^* y^* \rangle_{X,X^*} - F(x) - G(z)$$

$$= \sup_{x \in X} \langle x, x^* - A^* y^* \rangle_{X,X^*} - F(x) + \sup_{z \in Y} \langle z, y^* \rangle_{Y,Y^*} - G(z) = F^*(x^* - A^* y^*) + G(y^*),$$

donde $A^* : Y^* \longrightarrow X^*$ es el operador adjunto de A.

Ahora consideremos los espacios $X = H_0^1(\Omega)$ e $Y = L^2(\Omega)^n$ con sus respectivos duales topológicos $X^* = H^{-1}(\Omega)$ e $Y^* = L^2(\Omega)^n$. Dada una función $v : \Omega \longrightarrow I\!R$ en $L^2(\Omega)$, el problema a estudiar es

$$(P) \qquad \inf_{u\in H_0^1(\Omega)} \frac{1}{2}\int_\Omega \|\nabla u(x)\|_2^2 dx - \int_\Omega u(x)v(x)dx = \inf_{u\in H_0^1(\Omega)} \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^n} - \langle u, v\rangle_{H_0^1(\Omega),H^{-1}(\Omega)}.$$

Si tomamos los funcionales $F : H_0^1(\Omega) \longrightarrow I\!R$, $G : L^2(\Omega)^n \longrightarrow I\!R$ y $A : H_0^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)^n$ definidos por

$$\begin{aligned} F(u) &= -\int_\Omega u(x)v(x)dx = -\langle u, v\rangle_{H_0^1(\Omega),H^{-1}(\Omega)} \quad u \in H_0^1(\Omega) \\ G(u') &= \frac{1}{2}\int_\Omega \|u'(x)\|_2^2 dx = \frac{1}{2}\|u'\|^2_{L^2(\Omega)^n} \quad u' \in L^2(\Omega)^n \\ Au &= \nabla u \qquad u \in H_0^1(\Omega), \end{aligned}$$

es directo probar que $F \in \Gamma_0(X)$ (es lineal y continuo) y $G \in \Gamma_0(Y)$ (es continuo y estrictamente convexo). Si definimos la función $\phi : X \times Y \longrightarrow I\!R$ por

$$\phi(u, w) = F(u) + G(Au + w)$$

se tiene que el problema (P) puede ser escrito como

$$(P) \qquad \inf_{u\in H_0^1(\Omega)} F(u) + G(Au) = \inf_{u\in H_0^1(\Omega)} \phi(u, 0).$$

Observe también que $\phi \in \Gamma_0(X \times Y)$.

Por el cálculo hecho anteriormente se tiene

$$\phi^*(u^*, w^*) = F^*(u^* - A^*w^*) + G^*(w^*),$$

donde

$$\begin{aligned} G^*(w^*) &= G(w^*) \ \text{ ver Ejemplo 2.2.2} \\ A^*w^* &= -\operatorname{div} w^*. \end{aligned}$$

Calculemos F^*:

$$F^*(u^*) = \sup_{u\in H_0^1(\Omega)} \langle u, u^*\rangle_{H_0^1(\Omega),H^{-1}(\Omega)} + \langle u, v\rangle_{H_0^1(\Omega),H^{-1}(\Omega)} = \sup_{u\in H_0^1(\Omega)} \langle u, u^* + v\rangle_{H_0^1(\Omega),H^{-1}(\Omega)},$$

por lo tanto

$$F^*(u^*) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad u^* = -v \\ +\infty & \text{si no,} \end{cases}$$

y entonces

$$F^*(-A^*w^*) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \operatorname{div} w^* = -v \\ +\infty & \text{si no.} \end{cases}$$

De esta forma el problema dual (D) está dado por

$$(D) \qquad \inf_{w^* \in Y^*} \phi(0, w^*) = \inf_{w^* \in L^2(\Omega)^n} F^*(-A^*w^*) + G^*(w^*)$$

$$= \inf_{\substack{w^* \in L^2(\Omega)^n \\ \operatorname{div} w^* = -v}} \frac{1}{2}\|w^*\|^2_{L^2(\Omega)^n}.$$

La calificación primal se tendrá ya que para $u_0 = 0$ se tiene que $\phi(0, \cdot) = G(\cdot)$ es una función finita y continua en $w = 0 \in L^2(\Omega)^n$. Por otro lado, es fácil probar que la función $F(u) + G(Au)$ es estrictamente convexa y coerciva, al igual que la función $G^* = G$. Del Teorema 2.1.1 se deduce

$$(P) \qquad -\infty < \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} F(u) + G(Au),$$

por lo tanto el conjunto de soluciones $S(D)$ del problema dual (D) es no vacío. De hecho existe una unica solución por ser G^* estrictamente convexa (ver demostración del Teorema 2.1.1). Se puede probar que la condición de calificación dual (lo mismo que la condición de calificación primal pero para $\phi^*(\cdot, w_0^*)$) no se tiene. De la teoría general de espacios de Sobolev recordamos que $X = H_0^1(\Omega)$ es un espacio reflexivo y aplicando el Teorema 2.1.1 concluímos que existe un único $\bar{u}$ solución del problema primal (P).

Para terminar, sea $\bar{u}$ la solución de (P) y $\bar{w}^*$ la solución de (D). Del teorema de dualidad escribimos

$$0 = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^n} - \langle u, v\rangle_{H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)} + \inf_{\substack{w^* \in L^2(\Omega)^n \\ \operatorname{div} w^* = -v}} \frac{1}{2}\|w^*\|^2_{L^2(\Omega)^n}$$

$$= \frac{1}{2}\|\nabla \bar{u}\|^2_{L^2(\Omega)^n} - \langle \bar{u}, v\rangle_{H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\bar{w}^*\|^2_{L^2(\Omega)^n}.$$

Dado que $\operatorname{div} \bar{w}^* = -v$, remplazando se tiene

$$0 = \frac{1}{2}\|\nabla \bar{u}\|^2_{L^2(\Omega)^n} + \langle \bar{u}, \operatorname{div} w^*\rangle_{H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\bar{w}^*\|^2_{L^2(\Omega)^n}.$$

Dado que $A = \nabla$ y $-A^* = \operatorname{div}$ se observa

$$0 = \frac{1}{2}\|\nabla \bar{u}\|^2_{L^2(\Omega)^n} + \langle \bar{u}, \operatorname{div} w^*\rangle_{H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\bar{w}^*\|^2_{L^2(\Omega)^n}$$

$$= \frac{1}{2}\|\nabla\bar{u}\|^2_{L^2(\Omega)^n} - \langle\nabla\bar{u}, w^*\rangle_{L^2(\Omega)^n, L^2(\Omega)^n} + \frac{1}{2}\|\bar{w}^*\|^2_{L^2(\Omega)^n} = \frac{1}{2}\|\nabla\bar{u} - w^*\|^2_{L^2(\Omega)^n}.$$

La última igualdad es debida a que en un espacio de Hilbert $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ se tiene que la norma está definida por $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$ y por lo tanto

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2.$$

Finalmente, hemos demostrado que si $\bar{u}$ es la solución de (P) y $\bar{w}^*$ la solución de (D) entonces

$$\begin{cases} \nabla\bar{u} = w^* \\ \\ \text{div } w^* = -v \end{cases}$$

lo que implica

$$-\text{ div } \nabla\bar{u} = -\Delta\bar{u} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = v,$$

y como $\bar{u}$ está en $H^1_0(\Omega)$ se concluye

$$\begin{cases} -\Delta\bar{u}(x) = v(x) & x \in \Omega \\ \\ \bar{u}(x) = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Un análisis similar al anterior para otros problemas variacionales como el problema de Stokes o el de la torsión elasto-plástica se encuentra en [1]. Para mayor profundidad en el estudio de problemas variacionales en espacios de Sobolev se recomienda revisar [2].

Bibliografía

[1] F. Alvarez, *Análisis Convexo y Dualidad*, Apunte del Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de Chile (2005).
Disponible en `http://www.dim.uchile.cl/~pgajardo/apunteFAlvarez.pdf`

[2] H. Attouch, G. Buttazzo y G. Michaille, *Variational Analysis in Sobolev and BV spaces*, MPS-SIAM Series on Optimization (2005).

[3] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle* Masson, Paris, (1983).

[4] J.-B. Hiriart-Urruty y C. Lemaréchal, *Convex analysis and minimization algorithms. I. Fundamentals*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 305. Springer-Verlag, Berlin, (1993).

[5] J.-B. Hiriart-Urruty y C. Lemaréchal, *Convex analysis and minimization algorithms. II. Advanced theory and bundle methods*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 306. Springer-Verlag, Berlin, (1993).

[6] T.R. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton Mathematical Series, No. 28 Princeton University Press, Princeton, N.J. (1970).