| | |
|---|---|
| **Ma5201 Complejidad Computacional** | **01 de Junio de 2013** |

# Control 2

*Prof. Cátedra: M. Kiwi* — *Prof. Auxiliar: P. Muñoz, D. Salas*

TIEMPO: 5.0 HRS.

PROBLEMA 1:

(i).- (1.5 pts) Se define $H$ como el lenguaje consistente en codificaciones de máquinas de Turing $\langle M\rangle$ tales que $L_M = \{\langle M\rangle\}$. Pruebe que $H$ no es reconocible y que tampoco es co-reconocible.

Nota: Puede serle útil usar el Teorema de la Recurrencia.

(ii).- (1.5 pts) Sea el lenguaje OneInThreeSAT (*one in three 3SAT*) consistente en instancias $\langle\phi\rangle$ donde $\phi = \phi(x_1,\dots,x_n)$ es fórmula Booleana en forma 3CNF para la cual existe $a \in \{0,1\}^n$ que satisface $\phi$ de forma que en cada una de sus claúsulas uno y sólo uno de los literales de la claúsula evalúa a VERDADERO. Muestre que OneInThreeSAT es NP-duro.

Indicación: Reduzca desde 3SAT, reemplazando cada ocurrencia de un literal por una variable distinta, y use claúsulas y variables auxiliares para enforzar la condición deseada.

(iii).- Considere el siguiente problema: En un conjunto de $\ell$ días, digamos $\{d_1,\dots,d_\ell\}$, se deben asignar profesores de entre un conjunto, digamos $\{P_1,\dots,P_n\}$, a lo más un profesor por día. Cada profesor $P_i$ tiene un conjunto $D_i \subseteq \{d_1,\dots,d_\ell\}$ de días en que puede realizar sus clases, y un conjunto $T_i \subseteq \{t_1,\dots,t_m\}$ de temas que cubre si realiza clases. Se requiere que al final de los $\ell$ días, para todo $i \in [m]$, los alumnos hayan tenido clases con al menos un profesor que cubra el tema $t_i$. Interesa determinar si existe una solución factible.

(iii.1).- (0.3 pts) Formule el problema descrito como un problema de decisión, i.e. como uno de decisión de pertenencia en un lenguaje, digamos PlanClases.

(iii.2).- (0.6 pts) Muestre que VC $\le_P$ PlanClases.

(iii.3).- (0.6 pts) Muestre que 3SAT $\le_P$ PlanClases.

(iv).- (1.5 pts) Pruebe que el siguiente lenguaje es NP-duro.

$$\text{SetPack} = \left\{ \langle S_1,\dots,S_m,\Omega,k\rangle : \begin{array}{c} S_1,\dots,S_m \subseteq \Omega \text{ y } k \in \mathbb{N} \text{ son tales que} \\ \exists I \subseteq [m],\ |I| \ge k, \text{ tal que } S_i \cap S_j = \emptyset \text{ si } i,j \in I, i \ne j \end{array} \right\}.$$

PROBLEMA 2:

(i).- (3.0 pts) Demuestre el siguiente resultado visto en clases:

**Theorem 1 (Teorema de Savitch)** *Para todo $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ donde $s(n) \ge n$, se tiene que* NDespacio(s(n))) $\subseteq$ Despacio($s^2$(n)).

Nota: Primero suponga que $s(n)$ es espacio constructible. Posteriormente, discuta como remover el supuesto.

(ii).- Dado un lenguaje $L$, se define $L_n = \{\omega \in L : |\omega| \leq n\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se dice que $L$ es auto-reducible en tiempo polinomial si existe una máquina de Turing $M$ con acceso a un oráculo[1] y a tiempo polinomial tal que para todo $\widetilde{\omega}$, $|\widetilde{\omega}| = n$,

$$\widetilde{\omega} \in L \Longleftrightarrow M^{L_{n-1}} \text{ acepta } \widetilde{\omega}.$$

(ii.1).- (1.0 pts) De un ejemplo de un lenguaje visto que sea auto-reducible en tiempo polinomial. Justifique.

(ii.2).- (2.0 pts) Pruebe que si $L$ es auto-reducible en tiempo polinomial, entonces $L \in$ PESPACIO.

[1] Sea $O$ un lenguaje. Una máquina de Turing con oráculo $O$ es una máquina de Turing multicintas, una de las cuales se denomina cinta de pregunta. Además, la máquina de Turing tiene tres estados especiales $q_?$, $q_s$, y $q_n$. El estado $q_?$ se utiliza para preguntar si el contenido de la cinta de pregunta está en $L$. La respuesta se obtiene en la siguiente transición al entrar la máquina en uno de los estados $q_s$ o $q_n$ dependiendo de si la respuesta es *si* o *no*. Luego, la máquina sigue iterando hasta la próxima vez que entre en el estado $q_?$. La máquina de turing $M$ con oráculo $O$ se denota $M^O$.