Ma5201 Complejidad Computacional	**23 de Junio de 2012**

Control 3

Prof. Cátedra: M. Kiwi — *Prof. Auxiliar: P. Muñoz, D. Salas*

TIEMPO: 4.5 HRS.

PROBLEMA 1: (60 %)

(i).- (1.5 pts) Sea Bipartite el conjunto de instancias $\langle G\rangle$ tales que $G=(V,E)$ es un grafo bipartito. Sea UPath el conjunto de instancias $\langle G,s,t\rangle$ donde G es un grafo (no-dirigido) y $s,t\in V(G)$ son tales que existe un camino en G entre s y t. Reingold (2008) recientemente demostró que UPath está en log-espacio. Concluya (demuestre) que por lo tanto Bipartite también está en log-espacio.

Indicación: Recuerde que G es bipartito si y sólo si no contiene cíclos de largo impar.

(ii).- Sea MinServLoc el conjunto de instancias $\langle G,d,k\rangle$ donde $G=(V,E)$ es un grafo (no-dirigido) y k y d enteros no-negativos, tales que existe $S\subseteq V$, $|S|\leq k$, todo vértice $v\in V$ está a una distancia a lo más d de algún nodo en S, y no existe un subconjunto de nodos de V de cardinal *estricamente* menor que k que satisfaga la misma propiedad que S.

(ii.1).- (0.5 pts) Verifique que MinServLoc pertenece a PESPACIO.

(ii.2).- (1.0 pts) ¿Es posible que MinServLoc pertenezca a alguna clase que se conjetura estrictamente contenida en PESPACIO? Justifique su respuesta.

(iii).- (1.5 pts) Considere el siguiente “juego de la piedrita”. Dado $G=(V,E)$ digrafo, una partición $\{V_0,V_1\}$ de V, y dos nodos $s\in V_0$ y $t\in V_1$, dos jugadores J_0 y J_1 alternan moviendo una piedrita que inicialmente se encuentra en s. Si la piedrita se encuentra en $v\in V_i$, el jugador J_i mueve la piedrita a un nodo $v'\in V_{1-b}$ vecino de v en G, i.e. tal que $vv'\in E$. Si la piedrita llega a $t\in V_1$, el jugador J_0 gana. Sea Pebble el conjunto de instancias $\langle G,V_0,V_1,s,t\rangle$ tales que el jugador J_0 tiene una estrategia ganadora. Pruebe que Pebble es completo para una de las clases de complejidad vistas en el curso.

Indicación: No salte a conclusiones apresuradas.

(iv).- (1.5 pts) Pruebe que DESPACIO(n) $\neq$ P.

Indicación: Proceda por contradicción. Para $L\in$ PESPACIO y $\#\notin\Sigma_L$, considere $\text{padL}=\left\{\omega\#^{f(|\omega|)}\,:\,\omega\in L\right\}$ con $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ adecuadamente definida.

PROBLEMA 2: (40 %)

Se define P/poli como la clase de lenguajes $L\subseteq\{0,1\}^*$ para los que existe una familia de circuitos Booleanos $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y un polinomio $p(\cdot)$ tales que $|C_n|\leq p(n)$, C_n tiene n entradas, y para todo $\omega\in\{0,1\}^*$ se tiene que:

$$\omega\in L \iff C_n(\omega)=1\,,\ \text{donde } n=|\omega|\,.$$

(i).- (1.0 pts) Pruebe que todo lenguaje unario $L\subseteq 1^*$ esta en P/poli.

(ii).- (1.0 pts) Sea UHalt el conjunto de palabras 1^n tales que la codificación en binario de n es igual a $\langle M,\omega\rangle$ con M máquina de Turing que se detiene en la entrada ω. Probar que UHalt es indecidible.

(iii).- (1.0 pts) Pruebe que P esta estrictamente contenido en P/poli.

(iv).- (1.0 pts) Pruebe que si $\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{P}/\mathrm{poli}$, entonces existe una familia de circuitos Booleanos $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y un polinomio $p(\cdot)$ tales que $|C_n| \leq p(n)$ y cualquiera sea φ fórmula Booleana en $2n$ variables tal que $|\langle\varphi\rangle|$ es polinomial en n y cualquiera sea $u \in \{0,1\}^n$ se satsiface que:

$$\exists v \in \{0,1\}^n, \varphi(u,v) = 1 \iff C_n(\langle\varphi\rangle, u) = 1\,.$$

(v).- (1.0 pts) Asumiendo nuevamente que $\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{P}/\mathrm{poli}$, pruebe que existe una familia de circuitos Booleanos con n salidas $(C'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y un polinomio $q(\cdot)$ tales que $|C'_n| \leq q(n)$ y cualquiera sea φ fórmula Booleana en $2n$ variables tal que $|\langle\varphi\rangle|$ es polinomial en n y cualquiera sea $u \in \{0,1\}^n$ se satsiface que:

$$\exists v \in \{0,1\}^n, \varphi(u,v) = 1 \iff \varphi(u, C'_n(\langle\varphi\rangle, u)) = 1\,.$$

(vi).- (1.0 pts) Concluya el Teorema de Karp-Lipton (1980), es decir que si $\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{P}/\mathrm{poli}$, entonces $\Pi_2^P \subseteq \Sigma_2^P$ y por lo tanto $\mathrm{PH} = \Sigma_2^P$.