Ma5201 Complejidad Computacional	**02 de Junio de 2012**
Control 2	
Prof. Cátedra: M. Kiwi	*Prof. Auxiliar: P. Muñoz, D. Salas*

TIEMPO: 4.5 HRS.

PROBLEMA 1:

(i).- (2.0 pts) En una subasta típica de n objetos, el rematador vende el i-ésimo objeto a la persona que haga la mayor oferta. No obstante, en ciertos casos los objetos subastados están relacionados (por ejemplo, en el caso de terrenos que pueden ser adyacentes) y los oferentes podrían estar dispuestos a ofrecer un precio mayor para quedarse con ciertos lotes de objetos, digamos el conjunto de objetos $\{2,5,17\}$, pero sólo si se quedan con todos los objetos. En este caso, decidir a quienes conviene vender puede no ser simple. Sea SubComb (por Subasta Combinatorial) el problema de decisión consistente en dada (una codificación de) n y k enteros positivos, y una lista $(S_1,\omega_1),\ldots,(S_m,\omega_m)$ donde $S_i \subseteq \{1,\ldots,n\}$ y $\omega_i \in \mathbb{N}$, para todo i, decidir si existen conjuntos *disjuntos* $S_{i_1},\ldots,S_{i_\ell}$ tales que $\sum_{j=1}^{\ell}\omega_{i_j} \geq k$ (es decir, si ω_i es el monto que un oferente está dispuesto a ofrecer por el lote S_i, entonces el problema es decidir si el subastador puede ganar al menos k, bajo la obvia condición que no puede vender un objeto más de una vez. Pruebe que SubComb es NP-completo.

Indicación: Reduzca desde IndepSet.

(ii).- (2.0 pts) Dado un multi-grafo $G=(V,E)$, definimos el corte generado por S en G, denotado $\delta_G(S)$, por

$$\delta_G(S) = \{uv \in E \,:\, |\{u,v\}\cap S| = 1\}\,.$$

Sea MaxMCut el conjunto de instancias $\langle G,k\rangle$ donde G es un multi-grafo y $k\in\mathbb{N}$ son tales que $|\delta(S)| \geq k$ para algún $S\subseteq V$. Pruebe que VC $\leq_P$ MaxMCut.

Indicación: Dado un grafo $G=(V,E)$ genere un multi-grafo G' con un nodo adicional v' y agregue de manera adecuada arcos entre v' y los nodos de G.

(iii).- (2.0 pts) Sea SetCover el lenguaje de los $\langle S_1,\ldots,S_n;k\rangle$ donde $S_1,\ldots,S_n$ son subconjuntos, $k\in\mathbb{N}$, y tales que existe $I\subseteq\{1,\ldots,n\}$, $|I|\leq k$, tal que $\{S_i \,:\, i\in I\}$ es un recubrimiento de $\cup_{i=1}^{n} S_i$, i.e. $\cup_{i\in I} S_i = \cup_{i=1}^{n} S_i$. Pruebe que SetCover es NP-completo.

PROBLEMA 2:

(i).- (1.5 pts) Sean $L_1, L_2 \in \text{NP}\cap\text{coNP}$. Pruebe que $L_1 \Delta L_2 \in \text{NP}\cap\text{coNP}$ (donde Δ denota diferencia simétrica).

(ii).- (1.0 pts) Se dice que M es una mT universalmente no-determinista si es como una máquina de Turing no-determinista (con cinta no-determinista) pero donde ahora la condición para aceptar una entrada ω es que M acepte cualquiera sea el contenido de su cinta no-determinista. ¿Qué clase de lenguajes puede ser decidida en tiempo polinomial por máquinas de Turing universalmente no-determinista? Justifique.

(iii).- (1.5 pts) Una mT probabilista M es una mT multicintas una de las cuales se denomina *cinta aleatoria*. La cinta aleatoria es sólo de lectura y la cabeza lectora de dicha cinta no puede desplazarse a la izquierda.

Cuando una mT probabilista comienza a ejecutar, la cinta aleatoria contiene en cada una de sus celdas un 0 o un 1 con probabilidad $1/2$. El contenido de cada celda es independiente del contenido de las otras celdas. Se define la clase PP como el conjunto de lenguajes L para los que existe una máquina probabilista M y un polinomio p tal que M es una máquina de Turing a tiempo $p(n)$ y además,

$$\begin{aligned} \omega \in L &\implies \mathbb{P}_\rho\,(M \text{ acepta } \omega) > 1/2\,, \\ \omega \notin L &\implies \mathbb{P}_\rho\,(M \text{ acepta } \omega) < 1/2\,, \end{aligned}$$

donde la probabilidad esta tomada sobre el contenido inicial ρ de la cinta aleatoria elegido uniformemente en $\{0,1\}^{p(|\omega|)}$. Pruebeq que NP $\subseteq$ PP.

(iv).- (2.0 pts) Sea Σ_2SAT el siguiente problema de decisión: Dada (la codificación de) una fórmula Booleana cuantificada χ de la forma:

$$\chi = \exists_{x\in\{0,1\}^n} \forall_{y\in\{0,1\}^m} (\varphi(x,y) = 1)$$

donde φ es una fórmula Booleana en forma conjuntiva normal en $n+m$ variables, decidir si es que χ es Verdadera (es decir, decidir si existe un x tal que para todo y se tiene que $\varphi(x,y)$ es Verdadera). Probar que si P $=$ NP, entonces Σ_2SAT $\in$ P.