Ma50b Complejidad Computacional	**10 de Mayo de 2008**

Control 2

Prof. Cátedra: M. Kiwi — *Prof. Auxiliar: P. Camacho*

TIEMPO: 4.0 HRS.

PROBLEMA 1:

(i).- (2.0 pts) Se dice que $f : S \subseteq \Sigma^* \to \Sigma^*$ es parcialmente recursiva si existe una máquina de Turing que en la entrada ω se detiene con $f(\omega)$ en su cinta si $\omega \in S$, y no se detiene si $\omega \notin S$.

Pruebe que L es recursivamente enumerable si y sólo si L es el dominio de una función parcialmente recursiva.

(ii).- Dado M máquina de Turing y $\omega \in \Sigma_M^*$ sea $C(M,\omega) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ el índice de la celda de más a la derecha que alcanza M en la entrada ω, o $+\infty$ si M no ocupa una porción finita de su cinta en la entrada ω.

(ii.1).- (2.0 pts) Pruebe que para todo $k \in \mathbb{N}$, $L_k = \{\langle M,\omega\rangle : M \text{ mT}, C(M,\omega) \geq k\}$ es decidible.

(ii.2).- (2.0 pts) Pruebe que $L_{+\infty} = \{\langle M,\omega\rangle : M \text{ mT}, C(M,\omega) = +\infty\}$ es indecidible.

PROBLEMA 2: Una máquina de Turing M con oráculo A, denotado M^A, es una máquina de Turing con una cinta adicional, llamada cinta de oráculo. Cuando M escribe una palabra σ en su cinta de oráculo y entra en un estado especial (de pregunta), es informada en un paso si σ pertenece o no a A.

Se define Σ_2 como el conjunto de lenguajes L para los cuales existe un lenguaje A recursivamente enumerable y una máquina de Turing M con oráculo tal que M^A reconoce L.

(i).- (2.0 pts) Probar que L es reconocido (respectivamente decidido) por una máquina de Turing M con oráculo A recursivamente enumerable si y sólo si existe S máquina de Turing con oráculo A_{mT} que reconoce (respectivamente decide) L.

(ii).- (2.0 pts) Dar un ejemplo concreto de un lenguaje $L \in \Sigma_2$ tal que L no es *decidido* por una máquina de Turing M con oráculo A recursivamente enumerable.

Indicación: Defina un lenguaje y argumente en forma similar a lo que se hizo para demostrar la existencia de lenguajes reconocibles pero indecidibles.

(iii).- (2.0 pts) Si M es máquina de Turing, se define $H(M) = 1$ si M no se detiene cualquiera sea su entrada, y $H(M) = 0$ en caso contrario. Demuestre que el siguiente lenguaje está en Σ_2:

$$L = \{\langle M_1, M_2\rangle : H(M_1) = 1 \veebar H(M_2) = 1\} .$$

PROBLEMA 3: La Teoría de Complejidad de Kolmogorov estudia la aleatoriedad inherente a un objeto individual (en contraste con la Teoría de Probabilidades que se aboca al estudio de la aleatoriedad producida por una fuente). En este problema se verán algunas definiciones y resultados básicos de la Teoría de Complejidad de Kolmogorov.

Sea $x \in \{0,1\}^*$ una palabra. La *descripción minimal* de x es la secuencia más corta $\langle M, \omega \rangle \in \{0,1\}^*$ tal que M es una máquina de Turing estándar que en la entrada ω se detiene con x en su cinta. (Si existen varias de tales secuencias se toma la lexicográficamente más pequeña.) La complejidad de Kolmogorov de x, denotada $K(x)$, se define como el largo de la descripción minimal de x.

(i).- (1.2 pts) Pruebe que existe una constante $c \geq 0$ tal que para todo $x \in \{0,1\}^*$ se tiene que $K(x) \leq |x| + c$.

(ii).- (1.2 pts) Pruebe que existe $c \geq 0$ tal que para todo $x \in \{0,1\}^*$ se tiene que $K(xx) \leq K(x) + c$.

(iii).- (1.2 pts) Sea $n \in \mathbb{N}$ e $y \in \{0,1\}^*$. Pruebe que existe una constante $c \geq 0$ tal que para todo $x = y^n$ (y concatenado consigo mismo n veces) se tiene que $K(x) \leq K(y) + 2\log_2 n + c$.

Indicación: Sean $a \in \{0,1\}^n$ y $b \in \{0,1\}^m$. Considere la codificación $\ll a, b \gg = a_1 a_1 a_2 a_2 \ldots a_i a_i \ldots a_n a_n 0 1 b_1 \ldots b_m$ de la secuencia ab de forma de poder distinguir el inicio de b.

(iv).- (1.2 pts) Pruebe que existe $c \geq 0$ tal que para todo $x, y \in \{0,1\}^*$ se tiene que $K(xy) \leq 2\log_2 K(x) + K(x) + K(y) + c$.

(v).- (1.2 pts) Se dice que $x \in \{0,1\}^*$ es incompresible si $K(x) \geq |x|$. Pruebe que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $x \in \{0,1\}^n$ incompresible.

Indicación: Use un argumento de conteo.