MA50B Complejidad Computacional	**22 de Junio, 2002**
Control 3	
Profesor: M. Kiwi	**Auxiliar: E. Moreno**

Tiempo: 4.5 hrs.

PROBLEMA 1:

(i).- Sea $B3SAT$ el conjunto de los $\langle\phi\rangle \in 3SAT$ tales que en ϕ cada variable aparece en a lo más *tres* clausulas y cada literal aparece a lo más *dos* veces. Pruebe que $B3SAT$ es NP–completo.

(ii).- Sea $MAX2SAT$ el conjunto de los $\langle\phi, k\rangle$ donde $\phi = \phi(x_1, \ldots, x_n)$ es una fórmula Booleana en forma 2 conjuntiva normal tal que al menos k de las clausulas de ϕ pueden satisfacerse simultáneamente.

(ii.1).- Pruebe que a lo más 7 de las siguientes 10 clausulas pueden satisfacerse simultáneamente.

$$\begin{array}{ccc} & x, \quad y, \quad z, \quad w & \\ (\neg x \vee \neg y), & (\neg y \vee \neg z), & (\neg x \vee \neg z), \\ (x \vee \neg w), & (y \vee \neg w), & (z \vee \neg w). \end{array}$$

Concluya que cualquier asignación de valores de verdad que satisface $(x \vee y \vee z)$ puede ser extendido para satisfacer 7 y no más de las mencionadas clausulas.

(ii.2).- Pruebe que $MAX2SAT$ es NP–completo.

(iii).- Sea ϕ una fórmula Booleana en forma conjuntiva normal.

(iii.1).- De un algoritmo probabilista a tiempo polinomial que determina una asignación de valores de verdad que satisface, en promedio[1], al menos la mitad de las clausulas de ϕ.

(iii.2).- De un algoritmo *determinista* a tiempo polinomial con las mismas características del algoritmo de la parte anterior.

<u>Indicación</u>: Observe que para cualquier $f : \{0,1\}^n \to \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{(x_i)_i}(f(x_1, \ldots, x_n)) &= \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}_{(x_i)_i}(f(0, x_2, \ldots, x_n)) + \mathbb{E}_{(x_i)_i}(f(1, x_2, \ldots, x_n))\right) \\ &\leq \text{máx}\{\mathbb{E}_{(x_i)_i}(f(b, x_2, \ldots, x_n))) : b \in \{0,1\}\}. \end{aligned}$$

[1] Promedio esperado sobre los lanzamientos de moneda del algoritmo.

(iv).- Decimos que L pertenece a *paridad* P, denotado $L \in \oplus\mathrm{P}$, si existe una máquina de Turing no–determinista a tiempo polinomial tal que no importando cual sea su entrada realiza el mismo número de adivinanzas no–deterministas en todas sus ramas de cálculo, y $\omega \in L$ si y sólo si una cantidad par de las ramas de cálculo de M en la entrada ω lleva a aceptar.

Sea $\oplus SAT$ el conjunto de los $\langle\phi\rangle$ donde ϕ es una fórmula Booleana en forma conjuntiva normal que tiene un número par de asignaciones de valores de verdad que la satisfacen.

(iv.1).- Pruebe que $\oplus SAT \in \oplus\mathrm{P}$.

(iv.2).- Pruebe que $\overline{\oplus SAT} \in \oplus\mathrm{P}$.