MA50B Complejidad Computacional	**18 de Mayo, 2002**

Control 2

Profesor: M. Kiwi	**Auxiliar: E. Moreno**

Tiempo: 4.0 hrs.

PROBLEMA 1:

(i).- Sea $L = \{\langle M_i \rangle\}_{i\in\mathbb{N}}$ un lenguaje reconocible tal que para todo $i \in \mathbb{N}$ la mT M_i decide el lenguaje $L_i \subseteq \{0,1\}^*$. Pruebe que existe un lenguaje decidible D tal que $D \neq L_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Indicación: Considere un enumerador de L y use la técnica de diagonalización.

(ii).- Sea $k \in \mathbb{N}$ fijo. Sea $CLIQUE_k$ el conjunto de los $\langle G \rangle$ tales que $\langle G, k \rangle \in CLIQUE$. Pruebe que $CLIQUE_k \in$ P.

(iii).- Sea $2SAT$ el conjunto de los $\langle \phi \rangle \in SAT$ tales que ϕ está en forma 2 conjuntiva normal. Pruebe que $2SAT \in$ P.

Indicación: Dado ϕ fórmula Booleana en forma 2 conjuntiva normal sobre las variables $x_1, \ldots, x_n$, genere un grafo con $2n$ nodos basado en el hecho que $(x \vee y) \iff (\bar{x} \Rightarrow y) \iff (\bar{y} \Rightarrow x)$.

(iv).- Sea $BIN{-}PACK$ la colección de $\langle a_1, \ldots, a_n, B, k \rangle$ tales que $a_1, \ldots, a_n$ son números racionales positivos que representan el largo de ciertos objetos, B es un número racional positivo que representa el largo de "cajas" disponibles para "empaquetar" los mencionados objetos, k está en $\mathbb{N}$ y existe una forma de "empacar" los n objetos en a lo más k cajas de largo B. Pruebe que $BIN{-}PACK$ es NP–completo.

(v).- Sea $MEDIO{-}CLIQUE$ el conjunto de $\langle G \rangle$ tales que $\langle G, |V(G)|/2 \rangle \in CLIQUE$. Pruebe que $MEDIO{-}CLIQUE$ es NP–completo.

PROBLEMA 2:

Una mT alternante (mTA) es una mTN cuyos estados de paro se dividen en estados universales y existenciales. Cada nodo del árbol de cómputos de una mTA que representa una configuración que contiene un estado universal o existencial está etiquetado por $\forall$ o $\exists$ respectivamente. Decimos que un nodo etiquetado por $\forall$ (respectivamente $\exists$) acepta si todos sus hijos (respectivamente alguno de sus hijos) aceptan. Si la raíz del árbol de cómputos de una mTA en la entrada ω es un nodo de aceptación, decimos que la mT acepta.

Decimos que una mTA tiene k niveles de alternancia comenzando con $\exists$ (respectivamente $\forall$), si cualquiera que sea su entrada, en todas sus ramas de cálculo las etiquetas en dicha rama son $Q_1^* Q_2^* Q_3^* \ldots Q_k^*$ donde $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, $Q_{i+1} \neq Q_i$ y $Q_1 = \exists$ (respectivamente $Q_1 = \forall$).

Las nociones de complejidad de espacio y tiempo asociados a una mTA son las mismas que las de cualquier mTN. Se definen las clases

$$\begin{aligned} \text{ATIME}(T(n)) &= \{L : L \text{ es decidido por una mTA a tiempo } O(T(n))\}, \\ \text{AESPACIO}(S(n)) &= \{L : L \text{ es decidido por una mTA a espacio } O(S(n))\}. \end{aligned}$$

(i).- Sea $MIN{-}FORM$ el conjunto de $\langle \phi \rangle$ tales que ϕ es una fórmula Booleana, digamos en las variables $x_1, \ldots, x_n$, para la cual, no existe ψ fórmula Booleana (también en las variables $x_1, \ldots, x_n$) tal que $|\langle \psi \rangle| < |\langle \phi \rangle|$ y $\phi(a_1, \ldots, a_n) = \psi(a_1, \ldots, a_n)$ cualquiera sean $a_1, \ldots, a_n \in \{0, 1\}$.

Pruebe que $MIN{-}FORM$ puede ser decidido por una mTA con dos niveles de alternancia y en tiempo polinomial.

(ii).- Pruebe que si $S(n) \geq \Omega(\log(n))$, entonces

$$\text{AESPACIO}(S(n)) \subseteq \text{TIEMPO}(2^{S(n)}).$$

(iii).- Pruebe que si $T(n) \geq n$, entonces

$$\text{ATIEMPO}(T(n)) \subseteq \text{DESPACIO}(T(n)) \subseteq \text{ATIEMPO}(T^2(n)),$$

y concluya que $\text{PESPACIO} = \text{AP} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \text{ATIEMPO}(n^k)$.

(iv).- Pruebe que si $L \in \Sigma_k^P$ (respectivamente $L \in \Pi_k^P$), entonces existe una mTA con k niveles de alternancia comenzando con $\exists$ (respectivamente $\forall$) y que decide L.[1]

<u>Indicación</u>: Considere usar inducción en k.

[1] Recuerde que si L es un lenguaje, una mT con oráculo L es una mT con tres estados especiales ($q_?$, q_s y q_n) y varias cintas, una de los cuales es especial y se denomina cinta de pregunta. El estado $q_?$ se utiliza para preguntar si el contenido de la cinta de pregunta está en L. La respuesta se obtiene al entrar la máquina en la siguiente movida en uno de los estados q_s o q_n dependiendo de si la respuesta es *si* o *no*. Luego, la máquina sigue iterando hasta la próxima vez que entre en el estado $q_?$. Denotaremos la mT M con oráculo L por M^L. La clase Σ_k^P se define mediante la siguiente recursión: $\Sigma_1^P = \text{NP}$, $\Pi_1^P = \text{coNP}$, Σ_{k+1}^P es la clase de lenguajes decididos por una mTN M con oráculo $L \in \Pi_k^P$ y a tiempo polinomial, y $\Pi_{k+1}^P = \text{co}\Sigma_{k+1}^P$.