Ma34a Prob. y Proc. Estocásticos **22 de Mayo, 2006**

Control No. 2

Prof. Cátedra: M. Kiwi *Prof. Auxiliar: A. Contreras, R. Cortez*

Tiempo: 3.0 hrs.

Problema 1:

(i).- En una red de área local donde hay n computadores se usan mecanimos de resolución de conflictos cuando más de un computador requiere enviar *paquetes*. Por ejemplo, cada computador lanza una moneda con probabilidad $p \in]0,1[$. Si sale cara el computador envía un paquete. En caso contrario espera un instante de tiempo y repite el mismo procedimiento. Se dice que el computador i tiene éxito en una etapa dada, si es el único envía un paquete en dicha etapa.

(i).- (1.5 pts) Proponga un modelo para la situación descrita (i.e., espacio muestral, conjunto de eventos de interés y medida de probabilidad). Especifique sus supuestos.

(ii).- (1.5 pts) Argumente que $p(1-p)^{n-1}$ es la probabilidad que el i-ésimo computador tenga éxito en enviar un paquete en el primer intento. ¿Para que valor de p se maximiza la probababilidad? Interprete intuitivamente el resultado.

(ii).- Sea $Y = \min\{X_i : i = 1,\ldots,n\}$ donde las variables aleatorias $X_1,\ldots,X_n$ son tales que para todo $t_1,\ldots,t_n \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(X_1 > t_1,\ldots,X_n > t_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i > t_i)\ .$$

(ii.1).- (1.5 pts) Pruebe que $F_Y(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - F_{X_i}(t))$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

(ii.2).- (1.5 pts) Suponga que $n = 3$ y $X_1, X_2, X_3 \sim$ Uniforme$(0,1)$ son independientes. Determine y grafique la función densidad de Y.

Problema 2:

(i).- (3.0 pts) Un borrachito se pasea sobre $\mathbb{Z}$ partiendo del origen en el instante $t = 0$. En cada instante, independiente de lo que ocurra en el resto del tiempo, da un paso en la dirección $+$ con probabilidad p y en caso contrario da un paso en la dirección $-$. Sea X_t el entero sobre el que el borrachito se encuentra después de t instantes. Determine (en función de p y t) la función densidad de probabilidad de X_t.

Indicación: Si de t pasos el borrachito da exactamente k pasos en la dirección $+$ ¿dónde en $\mathbb{Z}$ queda?

(ii).- (3.0 pts) Sea $N(t)$ una variable aleatoria del tipo Poisson(λt) y para $n \in \mathbb{N}$ sea T_n la variable aleatoria tal que

$$T_n \le t \iff N(t) \ge n\,.$$

Pruebe que T_n es una Gama(n, λ)

PROBLEMA 3: Sea (X, Y) vector aleatorio con densidad conjunta

$$f_{X,Y}(a,b) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda(a+b)}\,, & \text{si } a, b \geq 0\,, \\ 0\,, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

(i).- (2.0 pts) Indicar qué tipo de variables aleatorias contínuas son X e Y.

(ii).- (2.0 pts) Para $\alpha > 0$, calcular $\mathbb{P}\,(Y \geq \alpha X)$.

(iii).- (2.0 pts) Determine la función densidad de $X/(X+Y)$.