Ma34a Prob. y Proc. Estocásticos **17 de Abril, 2006**

Control No. 1

Prof. Cátedra: M. Kiwi *Prof. Auxiliar: A. Contreras, R. Cortez*

Tiempo: 3.0 hrs.

Problema 1: Considere una versión simplificada del popular juego Japonés Sudoku en que el tablero es de 3×9 y el objetivo es rellenarlo de números del 1 al 9 de manera que: (1) en toda fila no se repita ningún número, y (2) no se repitan números en ninguno de los recuadros de 3×3 indicados por las letras A, B, C en la Figura 1.

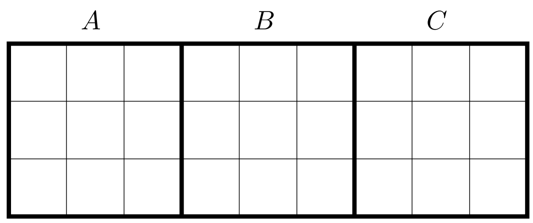

Figura 1: Tablero de Sudoku simplificado

(i).- (1.5 pts) Si se dejan los recuadros B y C en blanco, ¿de cuantas formas distintas se puede completar el recuadro A?

(ii).- (2.0 pts) Si ya se han completado los recuadros A y B (respetando las reglas del juego), ¿de cuantas formas distintas se puede completar el recuadro C?

(iii).- (2.5 pts) Si se ha completado el recuadro A y se deja el recuadro C en blanco ¿de cuantas formas distintas se puede completar el recuadro B? Concluya que hay $9! \cdot 56 \cdot 216^2$ formas distintas de llenar el tablero de 3×9 respetando las reglas del Sudoku.

Problema 2: Se dice que $\{A_i : i \in I\}$ es una $\mathbb{P}$–partición si $\mathbb{P}(A_i) > 0$ para todo $i \in I$, $\mathbb{P}(\cup_{i \in I} A_i) = 1$, y para todo $i, j \in I$ tal que $i \neq j$ se tiene que $\mathbb{P}(A_i A_j) = 0$.

(i).- (1.0 pts) Sea Ω numerable y $p_\omega \in [0,1]$ para todo $\omega \in \Omega$. Si $\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$, muestre que $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ tal que $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$ es una medida de probabilidad (la única tal que $\mathbb{P}(\{\omega\}) = p_\omega$ para todo ω).

(ii).- (1.5 pts) De un ejemplo de una $\mathbb{P}$–partición que no sea partición de Ω (especifique el espacio muestral Ω, conjuntos de interés $\mathcal{F}$ y medida de probabilidad $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$).

(iii).- (1.5 pts) Pruebe que si $A, B \in \mathcal{F}$ y $\mathbb{P}(B) = 1$, entonces $\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)$.

(iv).- (2.0 pts) Sea I un conjunto numerable de índices y sea $\{A_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{F}$ una $\mathbb{P}$–partición. Pruebe que para todo $A \in \mathcal{F}$ se tiene que

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(AA_i) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A|A_i)\,\mathbb{P}(A_i) \; .$$

Problema 3: Cuando en una encuesta se desea preguntar por algún tema delicado como el aborto (o infidelidad, violencia, divorcio, etc.), y que las personas no están dispuestas a contestar abiertamente, se puede usar el siguiente procedimiento "encubierto" para estimar la probabilidad que una persona esté a favor: Al encuestado se le presentan dos preguntas:

A) ¿Está de acuerdo con el aborto?
B) ¿Está en desacuerdo con el aborto?

y se le pide que lance (en secreto) un dado perfecto, de modo que si sale 5 o 6 contesta A y en caso contrario contesta B. Por último lo único que el encuestado responde es SI o NO.

(i).- (2.0 pts) Sea p la proporción de la población que está de acuerdo con el aborto. Determine en función de p la probabilidad que una persona elegida al azar en la población esté a favor del aborto si respondió SI a la pregunta (A o B) que le correspondió.

(ii).- (2.0 pts) Sea $\alpha \in]0, 1[$ la proporción de la población que pertenece a un cierto grupo X. Se sabe (no lo demuestre) que si la población es muy grande y se eligen n personas, entonces la probabilidad que k de ellas sean del grupo X es,

$$P_k = \binom{n}{k} \alpha^k (1-\alpha)^{n-k}.$$

Muestre que para n fijo y $n\alpha$ entero, P_k se maximiza cuando $k = n\alpha$.

Indicación: Compare con 1 el valor de P_k/P_{k-1}.

(iii).- (2.0 pts) El método de máxima verosimilitud para estimar un parámetro α como el de la parte anterior sugiere usar como estimador $\widehat{\alpha} = k/n$ (el valor de α que máximiza la probabilidad de obtener el resultado observado). Suponga que la encuesta sobre el aborto se aplicó a n personas y k de ellas respondieron SI ¿cuál es el estimador de máxima verosimilitud $\widehat{p}$ de p? (Explicite los supuestos que haga.)

Indicación: Calcule primero la probabilidad, en función de p, que una persona elegida al azar en la población responda SI.