

Resumen No. 3

Prof. Cátedra: M. Kiwi

Prof. Auxiliares: M. Soto, R. Cortez

1 Variables Aleatorias

1.1 Variables Aleatorias Absolutamente Continuas

En lo que sigue sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y X una variable aleatoria sobre el espacio medible (Ω, \mathcal{F})

Definición 1 [Variable Aleatoria Absolutamente Continua] Se dice que X es una variable aleatoria absolutamente continua si existe una función $f_X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $C \subseteq \mathbb{R}$ para el cual $\{X \in C\} \in \mathcal{F}$ se tiene que

$$\mathbb{P}(\{X \in C\}) = \int_C f_X(x) dx.$$

A la función f_X se le denomina función densidad de la variable aleatoria X .

Proposición 1 Sea X una variable aleatoria absolutamente continua, se tiene que

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$ y $\mathbb{P}(\{X = t\}) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
2. $F_X(t) = \int_{-\infty}^t f_X(x) dx$ y si f_X es continua en t , entonces $f_X(t) = \frac{d}{dt} F_X(t)$.

Proposición 2 Si X es variable aleatoria y $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es tal que $\{x \in \mathbb{R} \mid h(x) \neq f_X(x)\}$ es numerable, entonces h también es función densidad de X , i.e., para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^t f_X(x) dx = \int_{-\infty}^t h(x) dx.$$

En particular, la función densidad de una variable aleatoria no es única.

Proposición 3 Sea X una variable aleatoria absolutamente continua. Sean $D, R \subseteq \mathbb{R}$ tales que $\mathbb{R} \setminus f_X^{-1}(\{0\}) \subseteq D$ y $g: D \rightarrow R$ tal que $Y = g(X)$ es variable aleatoria (en particular esto ocurre cuando g es continua). Sigue que

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(\{X \in g^{-1}((-\infty, t])\}).$$

Si además g es biyectiva y diferenciable, entonces Y es absolutamente continua y

$$f_Y(t) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(t)) \left| \frac{d}{dt} g^{-1}(t) \right| & \text{si } t \in R, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Modelos absolutamente continuos: A continuación se da la fórmula de la función densidad f_X y los parámetros de varias distribuciones importantes de variables aleatorias X absolutamente continuas.

UNIFORME: X es una uniforme de parámetros $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, denotado $X \sim \text{Uniforme}(a, b)$, si

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b], \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

EXPONENCIAL: X es una exponencial de parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, denotado $X \sim \text{Exponencial}(\lambda)$, si

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

NORMAL: X es una normal de parámetros $\mu, \sigma^2 \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, denotado $X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$, si

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad \text{si } x \in \mathbb{R}.$$

GAMA: X es una gama de parámetros $\lambda, p \in \mathbb{R}$, $\lambda, p > 0$, denotado $X \sim \text{Gama}(p, \lambda)$, si

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(p)} \lambda (\lambda x)^{p-1} e^{-\lambda x}, & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

donde $\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$.

CHI-CUADRADO: X es una chi-cuadrado con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ grados de libertad, i.e., $X \sim \chi_n^2$, si

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2}, & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

donde $\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$.

CAUCHY: X es una Cauchy de parámetro $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, denotado $X \sim \text{Cauchy}(\mu, \sigma)$, si

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi\sigma \left(1 + \frac{1}{\sigma^2} (x - \mu)^2\right)}, \quad \text{si } x \in \mathbb{R}.$$

BETA: X es una beta de parámetros $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, denotado $X \sim \text{Beta}(a, b)$, si

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} & \text{si } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

donde $\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$.

Proposición 4 Si $X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$ y Φ denota la función distribución de una $\text{Normal}(0, 1)$, entonces

1. $\Phi(-t) = 1 - \Phi(t)$ cualquiera sea $t \in \mathbb{R}$,
2. si $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, entonces $aX + b \sim \text{Normal}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$, en particular $(X - \mu)/\sigma \sim \text{Normal}(0, 1)$.

2 Distribución Conjunta de Variables Aleatorias

En lo que sigue sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y X_1, \dots, X_n variables aleatorias sobre el espacio medible (Ω, \mathcal{F}) . Denotaremos por \vec{X} al vector aleatorio (X_1, \dots, X_n) , por \vec{X}_i a su i -ésima coordenada X_i , y por $\vec{X}^{(-i)}$ al vector aleatorio $(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n)$.

Definición 2 [Función Distribución Conjunta] A $F_{\vec{X}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se le llama función distribución conjunta de X_1, \dots, X_n si para todo $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$,

$$F_{\vec{X}}(t_1, \dots, t_n) = \mathbb{P}(\{X_1 \leq t_1, \dots, X_n \leq t_n\}).$$

Proposición 5 Para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ y $t_i \in \mathbb{R}$,

$$F_{X_i}(t_i) = \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \dots \lim_{t_{i-1} \rightarrow \infty} \lim_{t_{i+1} \rightarrow \infty} \dots \lim_{t_n \rightarrow \infty} F_{\vec{X}}(t_1, \dots, t_n).$$

Definición 3 [Funciones Distribución Marginales] A las funciones distribución F_{X_1}, \dots, F_{X_n} también se les denomina funciones distribución marginales de $F_{\vec{X}}$.

Proposición 6 Se tiene que:

1. $F_{\vec{X}}$ es no-decreciente en cada una de sus coordenadas,
2. $\lim_{t_1 \rightarrow \infty} \dots \lim_{t_n \rightarrow \infty} F_{\vec{X}}(t_1, \dots, t_n) = 1$, y para todo $t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lim_{t_i \rightarrow -\infty} F_{\vec{X}}(t_1, \dots, t_n) &= 0 \\ \lim_{t_i \rightarrow \infty} F_{\vec{X}}(t_1, \dots, t_n) &= F_{\vec{X}^{(-i)}}(t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n). \end{aligned}$$

Definición 4 [Variables Aleatorias Conjuntamente Discretas] Se dice que X_1, \dots, X_n son variables aleatorias conjuntamente discretas si toman a lo más una cantidad numerable de valores distintos, i.e., si $S_{\vec{X}} = \left\{ \vec{a} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbb{P} \left(\left\{ \vec{X} = \vec{a} \right\} \right) > 0 \right\}$ es numerable y $\mathbb{P} \left(\vec{X} \in S_{\vec{X}} \right) = 1$. Al conjunto $S_{\vec{X}}$ se le denomina soporte del vector aleatorio \vec{X} y a la función $p_{\vec{X}}: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ tal que $p_{\vec{X}}(\vec{a}) = \mathbb{P} \left(\left\{ \vec{X} = \vec{a} \right\} \right)$ se le denomina función densidad de probabilidad conjunta de X_1, \dots, X_n .

Proposición 7 Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias conjuntamente discretas, se tiene que

1. $\sum_{\vec{a} \in S_{\vec{X}}} p_{\vec{X}}(\vec{a}) = 1$ y si $\vec{a} \notin S_{\vec{X}}$ entonces $p_{\vec{X}}(\vec{a}) = 0$.
2. $F_{\vec{X}}(\vec{t}) = \sum_{\vec{a} \in S_{\vec{X}}: a_1 \leq t_1, \dots, a_n \leq t_n} p_{\vec{X}}(\vec{a})$, para todo $\vec{t} \in \mathbb{R}^n$.
3. $p_{X_i}(t_i) = \sum_{\vec{a} \in S_{\vec{X}}: \vec{a}_i = t_i} p_{\vec{X}}(\vec{a})$, para todo $\vec{t} \in \mathbb{R}^n$.

Definición 5 [Funciones Densidad de Probabilidad Marginales] A las funciones densidad de probabilidad p_{X_1}, \dots, p_{X_n} también se les denomina funciones densidad de probabilidad marginales de $p_{\vec{X}}$.

Definición 6 [Variables Aleatorias Conjuntamente Continuas] Se dice que X_1, \dots, X_n son variables aleatorias conjuntamente continuas si existe una función $f_{\vec{X}}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $C \subseteq \mathbb{R}^n$ para el cual $\left\{ \vec{X} \in C \right\} \in \mathcal{F}$ se tiene que

$$\mathbb{P} \left(\left\{ \vec{X} \in C \right\} \right) = \int \cdots \int_C f_{\vec{X}}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n.$$

A la función $f_{\vec{X}}$ se le denomina función densidad conjunta de X_1, \dots, X_n .

Proposición 8 Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias conjuntamente continuas, se tiene que

1. $\int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f_{\vec{X}}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = 1$.
2. $F_{\vec{X}}(t_1, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{t_1} \cdots \int_{-\infty}^{t_n} f_{\vec{X}}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$ para todo $\vec{t} \in \mathbb{R}^n$, y si $f_{\vec{X}}$ es continua en $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, entonces $f_{\vec{X}}(\vec{a}) = \frac{\partial^n}{\partial t_1 \cdots \partial t_n} F_{\vec{X}}(t_1, \dots, t_n) \Big|_{\vec{t}=\vec{a}}$.
3. $f_{X_i}(x_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\vec{X}}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_n$ para todo $x_i \in \mathbb{R}$.

Definición 7 [Funciones Densidad Marginales] A las funciones densidad de probabilidad f_{X_1}, \dots, f_{X_n} también se les denomina funciones densidad marginales de $f_{\vec{X}}$.

Definición 8 [Variables Aleatorias Independientes] Se dice que X_1, \dots, X_n son variables aleatorias independientes si para todo $A_1, \dots, A_n \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\{X_1 \in A_1\}, \dots, \{X_n \in A_n\} \in \mathcal{F}$,

$$\mathbb{P} \left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i \in A_i\} \right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(\{X_i \in A_i\}).$$

Una colección infinita de variables aleatorias se dice independiente si cualquier subcolección finita de ellas es independiente.

Lema 1 X_1, \dots, X_n son independientes sí y sólo si $F_{\vec{X}}(t_1, \dots, t_n) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(t_i)$.

Corolario 1 X_1, \dots, X_n son variables aleatorias independientes sí y sólo si

- $p_{\vec{X}}(\vec{a}) = \prod_{i=1}^n p_{X_i}(a_i)$ para todo $\vec{a} \in S_{\vec{X}}$ en el caso que X_1, \dots, X_n sean conjuntamente discretas.
- $f_{\vec{X}}(\vec{t}) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(t_i)$ para todo $\vec{t} \in \mathbb{R}^n$ en el caso que X_1, \dots, X_n sean conjuntamente continuas.

Lema 2 Sea $I \subseteq \mathbb{N}$. Si $\{X_i\}_{i \in I}$ es una colección de variables aleatorias independientes y para todo $i \in I$ la función $g_i: D_i \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es tal que $\mathbb{P}(\{X_i \in D_i\}) = 1$ e $Y_i = g_i(X_i)$ es variable aleatoria, entonces $\{Y_i\}_{i \in I}$ es una colección de variables aleatorias independientes.

Lema 3 [Suma de Variables Aleatorias Independientes] Si X_1 e X_2 son variables aleatorias independientes, entonces

- $p_{X_1+X_2}(c) = \sum_{a \in S_{X_1}} p_{X_1}(a)p_{X_2}(c-a) = \sum_{b \in S_{X_2}} p_{X_1}(c-b)p_{X_2}(b)$ en el caso que X_1 y X_2 sean conjuntamente discretas,
- $f_{X_1+X_2}(t) = \int_{\mathbb{R}} f_{X_1}(x)f_{X_2}(t-x)dx = \int_{\mathbb{R}} f_{X_1}(t-x)f_{X_2}(x)dx$ en el caso que X_1 y X_2 sean conjuntamente continuas.

Lema 4 Si X_1, \dots, X_n son variables aleatorias independientes tales que $X_i \sim \text{Normal}(\mu_i, \sigma_i^2)$, entonces $\sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Normal}(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2)$, y si además X_1, \dots, X_n son idénticamente distribuidas de

acuerdo a una $\text{Normal}(\mu, \sigma^2)$, entonces $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Normal}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.

Lema 5 [Método del Jacobiano] Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias conjuntamente continuas. Sean $D, R \subseteq \mathbb{R}^n$ tales que $\mathbb{P}(\{X \in D\}) = 1$ y $\vec{g} = (g_1, \dots, g_n): D \rightarrow R$ tal que para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ se tiene que $Y_i = g_i(X_1, \dots, X_n)$ es variable aleatoria (en particular esto último ocurre cuando g_i es continua). Si además

1. \vec{g} es biyección, i.e., para todo $(y_1, \dots, y_n) \in R$, el sistema de ecuaciones $y_i = g_i(x_1, \dots, x_n)$, $i \in \{1, \dots, n\}$, tiene solución única $x_i = h_i(y_1, \dots, y_n)$.
2. las funciones g_1, \dots, g_n son tales que todas sus derivadas parciales son continuas y que el Jacobiano de \vec{g} es no nulo para todo $(x_1, \dots, x_n) \in D$, i.e.,

$$(x_1, \dots, x_n) \in D \quad \Longrightarrow \quad J(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Det} \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{array} \right) \Bigg|_{(x_1, \dots, x_n)} \neq 0.$$

Entonces, se tiene que Y_1, \dots, Y_n son variables aleatorias conjuntamente continuas y

$$\begin{aligned} f_{\vec{Y}}(\vec{y}) &= \begin{cases} f_{\vec{X}}(\vec{g}^{-1}(\vec{y})) |J(\vec{g}^{-1}(\vec{y}))|^{-1}, & \text{si } \vec{y} \in R, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} f_{\vec{X}}(\vec{h}(\vec{y})) |J(\vec{h}(\vec{y}))|^{-1}, & \text{si } \vec{y} \in R, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases} \end{aligned}$$