Ma3101 Elementos de Álgebra **13 de Septiembre de 2014**

Pauta Control 1

Prof. Cátedra: M. Kiwi *Prof. Auxiliar: B. Ruiz, A. Turkieltaub*

PROBLEMA 1:

(i).- Por Teoremas de Sylow, existen $P_3, P_5 \leq G$, 3 y 5-subgrupos de Sylow de orden 3^2 y 5 respectivamente. Sean n_3 y n_5 el número de tales subgrupos, respectivamente. Nuevamente por Sylow, sabemos que

- $n_3 \equiv_3 1$ y $n_3|5$, luego $n_3 = 1$, por lo tanto $P_3 \lhd G$.
- $n_5 \equiv_5 1$ y $n_5|9$, luego $n_5 = 1$, por lo tanto nuevamente $P_5 \lhd G$.

Por Lagrange, $P_3 \cap P_5 = \{1_G\}$. Luego, por resultado visto $|P_3P_5| = |P_3||P_5|$, de donde se concluye que $P_3P_5 = G$. Se cumplen entonces las condiciones de otro resultado visto, que permite deducir que $G \cong P_3 \times P_5$. Como P_5 es de orden primo, debe ser isomorfo a $\mathbb{Z}_5$, y por lo tanto abeliano. Como P_3 es de orden el cuadrado de un primo, por resultado conocido, también es abeliano. Sigue que G es abeliano.

(ii).- Por Teoremas de Sylow, existen $P_2, P_5 \leq G$, 2 y 5-subgrupos de Sylow de orden 2^2 y 5 respectivamente. Sean n_2 y n_5 el número de tales subgrupos, respectivamente. Sabemos, nuevamente por Sylow que

- $n_2 \equiv_2 1$ y $n_2|5$, luego $n_2 = 1$ o $n_2 = 5$.
- $n_5 \equiv_5 1$ y $n_5|4$, luego $n_5 = 1$, por lo tanto $P_5 \lhd G$.

Por Lagrange, $P_2 \cap P_5 = \{1_G\}$. Luego, por resultado visto $|P_2P_5| = |P_2||P_5|$, de donde sigue que $P_2P_5 = G$.

Como P_5 es de orden primo, debe ser isomorfo a $\mathbb{Z}_5$. Si P_2 posee un elemento de orden 4, entonces es cíclico e isomorfo a $\mathbb{Z}_4$. Por Cauchy, sabemos que P_2 posee un elemento de orden 2, digamos x. Si P_2 no posee elementos de orden 4, entonces $\exists y \in P_2 \setminus \langle x \rangle$, que necesariamente debe tener también orden 2. Claramente $xy \notin \{1, x, y\}$, por lo que $P_2 = \{1, x, y, xy\} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Resumiendo, P_2 es isomorfo a $\mathbb{Z}_4$ o $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Consideramos tres casos:

- $\underline{n_2 = 1}$: I.e. $P_2 \lhd G$. Luego, por resultado visto, $G = P_2 P_5 \cong P_2 \times P_5$. Sigue que para este caso, G es isomorfo a $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5$ o $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$.

- $\underline{n_2 = 5 \text{ y } P_2 \cong \mathbb{Z}_4}$: En este caso, por resultados vistos, $G \cong \mathbb{Z}_5 \times_\Phi \mathbb{Z}_4$ para algún morfismo no-trivial $\Phi : \mathbb{Z}_4 \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_5)$. Como 5 es primo, sabemos que $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_5) \cong \mathbb{Z}_5^*$ que posee dos elementos de orden 4, a saber ± 2. Sea $\varphi_\alpha : \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5$ tal que $\varphi_\alpha(x) = \alpha x$. Hay dos sub-casos a considerar:

  - $\underline{\Phi(1) = \varphi_2}$: Sigue que $\Phi(h) = \varphi_{2^h}$ y que

  $$(n,h) \times_\Phi (n',h') = (n +_5 \varphi_{2^h}(n'), h +_4 h') = (n +_5 2^h n', h +_4 h').$$

  - $\underline{\Phi(1) = \varphi_{-2}}$: Sigue que $\Phi(h) = \varphi_{(-2)^h}$ y que

  $$(n,h) \times_\Phi (n',h') = (n +_5 (-2)^h n', h +_4 h').$$

- $\underline{n_2 = 5 \text{ y } P_2 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}$: En este caso, por resultados vistos, $G \cong \mathbb{Z}_5 \times_\Phi (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ para algún morfismo no-trivial $\Phi : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_5)$. como, $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_5) \cong \mathbb{Z}_5^*$ posee un único elemento de orden 2, a saber -1, hay esencialmente dos sub-casos a considerar que no son trivialmente isomorfos (φ_α definida como en el ítem anterior):

  - $\underline{\Phi(1,0) = \varphi_{-1} \text{ y } \Phi(0,1) = id}$: Sigue que $\Phi(a,b)$ es la función $x \to \varphi_{(-1)^a}(x)$. Luego,

  $$(n,h_1,h_2) \times_\Phi (n',h_1',h_2') = (n +_5 (-1)^{h_1} n', h_1 +_2 h_1', h_2 +_2 h_2').$$

  Este grupo es isomorfo a $D_{10} \cong D_5 \times \mathbb{Z}_2$.

  - $\underline{\Phi(1,0) = \varphi_{-1} \text{ y } \Phi(0,1) = \varphi_{-1}}$: Sigue que $\Phi(a,b)$ es la función $x \to \varphi_{(-1)^{a+b}}(x)$. Luego,

  $$(n,h_1,h_2) \times_\Phi (n',h_1',h_2') = (n +_5 (-1)^{h_1+h_2} n', h_1 +_2 h_1', h_2 +_2 h_2').$$

  Este grupo también es isomorfo a $D_{10} \cong D_5 \times \mathbb{Z}_2$.

(iv).- Consideremos las acción de $I : G \times G \to G$ tal que $I(g,x) = I_g(x)$ donde $I_g(x) = gxg^{-1}$. Sigue que G se particiona en órbitas. Como $\mathrm{Orb}(x) = \{x' : gx = x'g\}$ sigue que $|\mathrm{Orb}(x)| = 1$ ssi $x \in Z(G)$. Las condiciones del enunciado sobre los x_λ's equivalen a decir que estos son representantes de cada una de las órbitas de cardinal estrictamente mayor que 1. Luego,

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{\lambda \in \Lambda} |\mathrm{Orb}(x_\lambda)|.$$

Por resultado visto, $\mathrm{Orb}(x_\lambda) \cong G/\mathrm{Est}(x_\lambda)$ como G-espacios. Además, como $\mathrm{Est}(x) = \{g \in G : gx = xg\} = Z(x)$, sigue que $|\mathrm{Orb}(x_\lambda)| = |G|/|Z(x_\lambda)| = [G : Z(x_\lambda)]$.

PROBLEMA 2:

(i).- Sea $\Pi : G_1 \times G_2 \to G_1$ tal que $\Pi(g_1, g_2) = g_1$. Claramente, Π es epimorfismo y su núcleo es $\{1_{G_1}\} \times G_2$, por lo que $(\{1_{G_1}\} \times G_2) \lhd (G_1 \times G_2)$. Por Teorema del Factor, tenemos que $G_1 \cong (G_1 \times G_2)/(\{1_{G_1}\} \times G_2)$. Luego, lo que se pide demostrar es consecuencia directa del resultado mencionado en el enunciado aplicado a la cadena:

$$(G_1 \times G_2) \rhd (\{1_{G_1}\} \times G_2) \rhd (\{1_{G_1}\} \times \{1_{G_2}\}),$$

teniendo en cuenta que (trivialmente) $(\{1_{G_1}\} \times \{1_{G_2}\}) \lhd (\{1_{G_1}\} \times G_2)$ y que además $(\{1_{G_1}\} \times G_2)/(\{1_{G_1}\} \times \{1_{G_2}\}) \cong G_2$.

(ii).- El argumento es casi idéntico al de la parte (i). En efecto, es fácil ver que $\Upsilon : K \times_\Phi \{1_L\} \to K$ tal que $\Upsilon(k, 1_L) = k$ es un isomorfismo, luego $K \cong (K \times_\Phi \{1_L\})$. Al igual que en la parte (i) $\Pi : K \times_\Phi L \to L$ tal que $\Pi(k,l) = l$ es un epimorfismos con núcleo $K \times \{1_L\}$, por lo que $(K \times_\Phi \{1_L\}) \lhd (K \times_\Phi L)$. Por Teorema del Factor, sigue que $(K \times_\Phi L)/(K \times_\Phi \{1_L\})$ es isomorfo a L, la conclusión es consecuencia directa de la propiedad vista en clase auxiliar mencionada en el enunciado.

(iii).- Sean $\nu_H : G \to G/H$ y $\nu_K : G \to G/K$ epimorfismos canónicos y consideremos el morfismo inducido $\nu = (\nu_H, \nu_K) : G \to G/H \times G/K$, tal que $\nu(x) = (\nu_H(x), \nu_K(x))$. Claramente $\mathrm{Ker}(\nu) = H \cap K$, por lo que el Teorema del Factor nos asegura que $G/(H \cap K) \cong \mathrm{Im}(\nu) \subseteq G/H \times G/K$. Puesto que G/H y G/K son solubles, de la parte (i) sabemos que su producto directo también lo es, y entonces (por el resultado de auxiliar mencionado en el enunciado) también todos sus subgrupos. Luego, $G/(H \cap K)$ es soluble.

(iv).- Sabemos que $A_3 \lhd S_3$ y que S_3/A_3 es de orden 2, luego $S_3/A_3 \cong \mathbb{Z}_2$ es abeliano. Además sabemos que A_3 tiene orden $3!/2 = 3$ primo, luego $A_3 \cong \mathbb{Z}_3$ abeliano, por lo que $\{id\} \lhd A_3$ y $A_3/\{id\}$ es abeliano. En resumen, A_3 es soluble.

Sabemos que A_4 tiene orden $4!/2 = 12$. Por Sylow, se tiene que A_4 posee un 2-subgrupo de Sylow P_2 de orden 4 (el cuadrado de un primo, luego abeliano) con $n_2 = 1$ o $n_2 = 3$ conjugados distintos. El segundo caso se descarta, porque de lo contrario A_4 tendría más de 3 elementos de orden 2, pero se verifica fácilmente que los únicos elementos de orden 2 en A_4 son $(12)(34)$, $(13)(24)$, y $(14)(23)$. Sigue que P_2 es normal en A_4, y como A_4/P_2 tiene orden 3, primo, debe ser abeliano. En resumen, $\{id\} \lhd P_2 \lhd A_4$ y A_4/P_2 y $P_2/\{id\} \cong P_2$ son abelianos.

Consideremos ahora el caso de D_n. Sean θ y r la rotación en $2\pi/n$ y una reflexión del plano, respectivamente, que llevan un n-ágono a si mismo. Sabemos que $r\theta r^{-1} = \theta^{-1}$, por lo que si $N = \langle \theta \rangle$ tenemos que $rNr^{-1} \subseteq N$. Trivialmente, $\theta N \theta^{-1} \subseteq N$. Luego, concluimos que $N \triangleleft D_n$. Además D_n/N es de orden 2 luego abeliano. Como N es cíclico, es abeliano. Sigue que D_n es soluble.

Finalmente, consideremos el caso en que P es un p-grupo finito. Si $Z(P) = P$, entonces P es abeliano y estamos listos puesto que $\{1_P\} \triangleleft P$. Supongamos entonces que $Z(P) \subsetneq P$. Por argumentos vistos en clases, de la Fórmula de las Clases se deduce que $|Z(P)|$ es divisible por p, luego $|Z(P)| > 1$. Como se tiene trivialmente que $Z(P) \triangleleft P$ y que $Z(P)$ es también p-grupo (por ser p-subgrupo de P), se concluye el resultado deseado.