Ma31a Elementos de Álgebra	15 de Noviembre, 2008

Control 3

Prof. Cátedra: M. Kiwi — *Prof. Auxiliar: E. Araya, O. Rivera*

TIEMPO 4.0 HRS.

PROBLEMA 1:

(i).- (1.5 pts) Encuentre el cuerpo de descomposición $\mathbb{K}$ del polinomio $p(x) = x^4 + 4 \in \mathbb{Q}[x]$. Determine $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$.

(ii).- (1.5 pts) Sea $\mathbb{K}$ el el cuerpo de descomposición de $p(x) = (x^3+x+1)(x^2+x+1) \in \mathbb{F}_2[x]$. Determine $[\mathbb{K} : \mathbb{F}_2]$.

(iii).- (1.5 pts) Rehaga la demostración del siguiente resultado visto en clases: Sea $\mathbb{K}$ extensión de $\mathbb{F}$. Si $u \in \mathbb{K}$ entonces

$$\mathbb{F}(u) = \left\{ \frac{p(u)}{q(u)} \in \mathbb{K} \,:\, p, q \in \mathbb{F}[x], q(u) \neq 0 \right\} .$$

(iv).- (1.5 pts) Sea $\mathbb{K}$ extensión de $\mathbb{F}$. Sean $u, v \in \mathbb{K}$. Pruebe que si v es algebraico sobre $\mathbb{K}(u)$, entonces u es algebraico sobre $\mathbb{K}(v)$.

PROBLEMA 2: Una extensión de cuerpos $\mathbb{N}|_{\mathbb{F}}$ se dice normal si y sólo si es algebraica, y para cada $a \in \mathbb{N}$, su polinomio mínimo $p_a(X) \in \mathbb{F}[x]$ se descompone completamente como factores lineales en $\mathbb{N}[x]$.

(i).- (0.75 pts) Pruebe que todo cuerpo $\mathbb{F}$ admite extensiones normales $\mathbb{N}|_{\mathbb{F}}$.

(ii).- (0.75 pts) Sea $\mathbb{N}$ algebraico sobre $\mathbb{F}$. Pruebe que $\mathbb{N}|_{\mathbb{F}}$ normal si y sólo si para todo $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ irreducible tal que $p(x)$ tiene un raíz en $\mathbb{N}$ se tiene que $p(x)$ se factoriza como producto de polinomios lineales en $\mathbb{N}[x]$.

(iii).- (1.0 pts) Muestre que la extensión $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})|_{\mathbb{Q}}$ no es normal.

(iv).- (1.5 pts) Sean $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{K} \subseteq \mathbb{N}$ cuerpos. Pruebe que si $\mathbb{N}|_{\mathbb{F}}$ es normal, entonces $\mathbb{N}|_{\mathbb{K}}$ también es normal.

(v).- (2.0 pts) Sea $\overline{\mathbb{N}}$ la clausura algebraica de $\mathbb{N}$. Muestre que si $\mathbb{N}|_{\mathbb{F}}$ es normal y $\sigma : \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{N}}$ una inmersión sobre $\mathbb{F}$, entonces $\sigma(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$.