Ma31a Elementos de Álgebra **24 de Octubre, 2008**

Control 2

Prof. Cátedra: M. Kiwi *Prof. Auxiliar: E. Araya, O. Rivera*

TIEMPO 4.0 HRS.

PROBLEMA 1:

(i).- Sea R un anillo. Se dice que el ideal P de R es un ideal primo si para todo $a, b \in R$ tal que $ab \in P$ se tiene que $a \in P$ o $b \in P$.

(i.1).- (0.5 pts) Determine todos los ideales primos de $\mathbb{Z}$.

(i.2).- (0.5 pts) Pruebe que el ideal P de R es primo si y solo si R/P es es un dominio de integridad.

(ii).- (1.5 pts) Rehacer la demostración del siguiente resultado visto en clases: Si R es un dominio de integridad principal y $a, b \in R$ no son ambos nulos, entonces existe un máximo común divisor c de a y b. Además, existen $s, t \in R$ tales que $sa + tb = c$ (Lema de Bezout).

(iii).- Las siguientes partes están relacionadas.

(iii.1).- (1.0 pts) Sea V un R-módulo. Pruebe que todo submódulo de V es finitamente generado si y solo si V satisface la condición de cadena ascendente, i.e. no existe una secuencia estrictamente creciente $W_1 \subsetneq W_2 \subsetneq \ldots$ de submódulos de V.

(iii.2).- (1.0 pts) Un anillo R se dice noetheriano si todo ideal (no degenerado) de R es finitamente generado. Pruebe que si R es noetheriano, entonces todo ideal (no degenerado) de R está contenido en un ideal maximal.[1]

(iv).- (1.5 pts) Sea $\varphi : V \to W$ un homomorfismo de R-módulos. Pruebe que si el kernel y la imágen de φ son finitamente generados, entonces V también lo es.

<u>Indicación</u>: Observe que si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ genera V, entonces $\{\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)\}$ generan la imágen de φ.

[1]Recuerde que un ideal (no degenerado) I en R es un ideal maximal de R, si para todo ideal (no degenerado) I' tal que $I \subseteq I'$ se tiene que $I = I'$.

Problema 2: Sea M un $\mathbb{F}[x]$-módulo cíclico de torsion tal que $M = \langle m_0 \rangle_{\mathbb{F}[x]}$.

(i).- (1.5 pts) Mostrar que existe $\delta(x) \in \mathbb{F}[x]$ mónico tal que $M \cong \mathbb{F}[x]/(\delta(x))$.

(ii).- (1.5 pts) Sea $T : M \to M$ tal que $T(m) = xm$. Pruebe que M es un $\mathbb{F}$-espacio vectorial generado por $\beta = \{m_0, T(m_0), T^2(m_0), \ldots, T^{n-1}(m_0)\}$ donde n es el grado del polinomio $\delta(x)$ de la parte (i).

(iii).- (1.5 pts) Pruebe que β es linealmente independiente en M como $\mathbb{F}$-espacio vectorial.

(iv).- (1.5 pts) Exprese la matriz representante de T con respecto a la base β, i.e. $[T]_{\beta,\beta}$, en término de los coeficientes de $\delta(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_{n-1} x^{n-1} + x^n$.