Ma31a Elementos de Álgebra	**06 de Octubre, 2007**

Control 2

Prof. Cátedra: M. Kiwi — *Prof. Auxiliar: R. Cortez*

TIEMPO 5.0 HRS.

PROBLEMA 1: (40 %)

(Las siguientes partes no están relacionadas)

(i).- (2.0 pts) Sea R un dominio de integridad (con unidad). Pruebe que si R es finito, entonces es un cuerpo.

(ii).- (2.0 pts) Un dominio de integridad R se denomina *anillo Euclideano* si existe $d : R \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ tal que

- Para todo $a, b \in R$, ambos no nulos, $d(a) \leq d(ab)$.
- Para todo $a, b \in R$, ambos no nulos, existe $t, r \in R$ tal que $a = tb + r$ donde $r = 0$ o $d(r) < d(b)$.

Pruebe que si R es un anillo Euclideano, entonces es un dip.

(iii).- (2.0 pts) Sea R un dip y $\alpha, \beta \in R$. Pruebe que $\alpha\,(R/(\beta))$ es isomorfo a $R/(\beta/\operatorname{mcd}(\alpha, \beta))$ como R-módulo.

PROBLEMA 2: (60 %)

Sea V espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{F}$ de dimensión $n \in \mathbb{N}$ y $T : V \to V$ una transformación lineal. En particular, recordar que V es un $\mathbb{F}[t]$ módulo con la ley de composición externa $p(t) \cdot v = (p(T))(v)$.

(i).- (1.2 pts) Pruebe que V es isomorfo a $\mathbb{F}[t]/(p_1^{e_1}) \oplus \ldots \oplus \mathbb{F}[t]/(p_r^{e_r})$ como $\mathbb{F}[t]$ módulo para $p_1, \ldots, p_r$ polinomios irreducibles en $\mathbb{F}[t]$ y $e_1, \ldots, e_r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

(ii).- (1.2 pts) Concluya a partir de (i) que existen $W_1, \ldots, W_r$ submódulos cíclicos de V tales que $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_r$.

(iii).- (1.2 pts) Sea β_i base de W_i, $i = 1, \ldots, r$. Pruebe que $\beta = \bigcup_{i=1}^r \beta_i$ es base de V y que $[T]_{\beta,\beta}$ es una matriz diagonal por bloques de tamaños $n_i \times n_i$, donde $n_i = |\beta_i|$, $i = 1, \ldots, r$. Pruebe además, que $T(W_i) \subseteq W_i$.

(iv).- (1.2 pts) Se define $I = ((t-\alpha)^m)$. Pruebe que $\beta = \{[(t-\alpha)^i]_I : i = 0, \ldots, m-1\}$ es base de $\mathbb{F}[t]/((t-\alpha)^m)$. Para

$$\begin{array}{rccc} L & : & \mathbb{F}[t]/((t-\alpha)^m) & \to & \mathbb{F}[t]/((t-\alpha)^m) \\ & & [q]_I & & [t \cdot q]_I \end{array}$$

Pruebe que $[L]_{\beta,\beta}$ es un bloque de Jordan, i.e., es de la forma

$$\begin{pmatrix} \alpha & & & \\ 1 & \alpha & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

<u>Indicación</u>: Si lo desea, puede asumir (sin demostrar) que $\{(t-\alpha)^n : n \in \mathbb{N}\}$ es base de $\mathbb{F}[t]$.

(v).- (1.2 pts) Pruebe que en el caso en que $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ existe una base con respecto a la cual la matriz representante de T es una matriz diagonal de bloques de Jordan.

<u>Indicación</u>: Use los resultados conocidos de irreducibilidad de polinomios en $\mathbb{C}[x]$.