Sentido de Giro de las Espirales para el Análisis Cualitativo de SNL. 2da Versión

Francisco J. Bravo S.

1 de septiembre de 2011

1. Introducción

El poder graficar correctamente el sentido de giro de los puntos críticos en los SNL cuando estos resultan ser espirales debe ser una de las dudas más comunes que surgen entre los alumnos. Una de las soluciones más fáciles es hacer calzar el sentido de giro con el de los otros puntos críticos conocidos en el diagrama de fase (esto dado que las soluciones del sistema lineal son continuas). En esta guía me propongo explicar el fundamento y metodología necesaria para poder determinar el sentido y forma de los puntos críticos espirales.

Recordemos que estos puntos críticos se hacen para sistemas 2×2, y que en dichos puntos la matriz del sistema linealizado posee 2 valores propios complejos conjugados $a \pm ib$.

La primera parte es la justificación del procedimiento hecho en la sección **Algoritmo**. Si no está interesado en la teoría, pude perfectamente pasar a esta última sección

2. Desarrollo teórico

Teorema 1 *Sea A una matriz real de 2×2 con valor propio complejo $\lambda = a + ib$ $(b \neq 0)$ y vector propio asociado $v = u_1 + iu_2 \in \mathbb{C}^2$. Entonces*

$$A = PCP^{-1}; \quad con \quad P = [u_1; u_2] \quad C = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

Demostración: Si $\lambda = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$ es un autovalor de A (matriz cuadrada real) y $v = u_1 + iu_2$ $(u_1, u_2 \in \mathbb{R}^m)$ es un autovector de A asociado a λ, entonces $\overline{v} = u_1 - iu_2$ es autovector de A asociado a $\overline{\lambda} = a - ib$ y, por tanto, tenemos las igualdades

$$Av = \lambda v = (a + bi)(u_1 + iu_2)) \quad \Rightarrow \quad Au_1 + iAu_2 = (au_1 - bu_2) + i(bu_1 + au_2)$$
$$A\overline{v} = \lambda\overline{v} = (a - bi)(u_1 - iu_2)) \quad \Rightarrow \quad Au_1 - iAu_2 = (au_1 - bu_2) - i(bu_1 + au_2)$$

y así, identificando las partes real e imaginaria en cualquiera de las dos igualdades anteriores tenemos

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Au_1 & = & au_1 - bu_2 \\ Au_2 & = & bu_1 + au_2 \end{array} \right.$$

Expresando estas igualdades de forma matricial obtenemos

$$A[u_1, u_2] = [u_1, u_2] \left[\begin{array}{cc} a & b \\ -b & a \end{array} \right]$$

$\square$

Este teorema nos dice que la matriz A del sistema es semejante a la matriz C

Para el sistema $X' = AX$, con A cumpliendo las condiciones del teorema, podemos hacer

$$\begin{array}{rcl} X' & = & AX \\ X' & = & PCP^{-1}X \\ \underbrace{P^{-1}X'}_{Y'} & = & C\,\underbrace{P^{-1}X}_{Y} \\ Y' & = & CY \end{array}$$

Luego, basta resolver el sistema $Y' = CY$, y volver a la variable original $X = PY$. De este modo, la trayectoria de la espiral que obtengamos al resolver el sistema para Y, será la trayectoria que dibujaremos, pero sobre el eje formado por los vectores $< u_1, u_2 >$.

Sabemos que la solución del sistema

$$Y' = \left[\begin{array}{cc} a & b \\ -b & a \end{array} \right] Y$$

es

$$Y = e^{at} \left(\begin{array}{cc} \cos(bt) & \sin(bt) \\ -sin(bt) & \cos(bt) \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} y_0^1 \\ y_0^2 \end{array} \right)$$

Para este sistema sabemos cuales son sus trayectorias para los valores de a y b

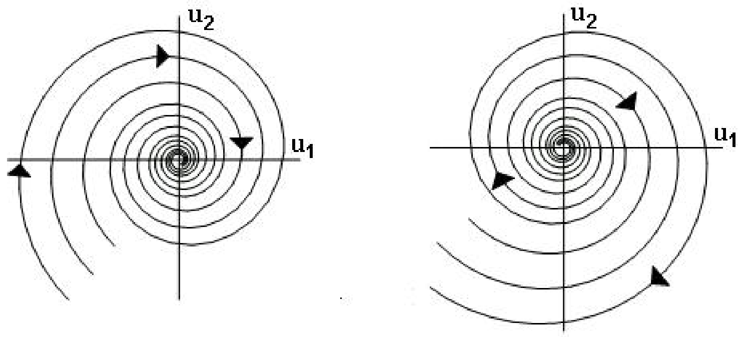

Figura 1: A la izquierda $a < 0$, $b > 0$. A la derecha $a > 0$, $b > 0$

3. Algoritmo

Luego, el algoritmo para dibujar diagramas para un sistema $X' = AX$ es el siguiente:

1. Calcular los valores propios $\lambda = a \pm ib$
2. Escoger el valor propio con $b > 0$
3. Calcular el vector propio $v = u_1 + iu_2$ asociado al valor propio elegido
4. Dado el valor de a, el diagrama es uno de los dos de la Fig (1)
5. Dibujar el diagrama final, graficando los vectores u_1 y u_2 en el plano, con el dibujo de la espiral

Ejemplo:
Dibujemos el diagrama del sistema $X = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X$

Los valores propios del sistema son $\lambda = \pm i$. Elegimos el valor propio $\lambda = i$, cuyo vector propio es $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{u_1} + i \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{u_2}$

Luego, como elegimos el valor propio con parte imaginaria positiva, las trayectorias giran en sentido horario, en el diagrama con ejes u_1 u_2 (Fig (2))

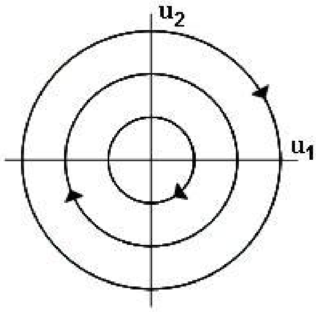

Figura 2: Trayectoria del sistema en el espacio de base $< u_1, u_2 >$

Ahora trasladamos este diagrama. El vector u_1 descansa sobre el eje x. El vector u_2 tiene coordenadas $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, luego al graficarlo en el diagrama final, la figura se invierte, obteniendo las trayectorias de nuestro sistema inicial

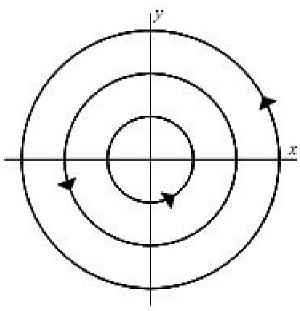

Figura 3: Trayectorias del sistema X'=AX

Notar que el sentido de giro cambió a antihorario, debido a la rotación del eje que tuvimos que realizar.

Con este algoritmo, note que sólo es necesario conocer 2 diagramas para las espirales, los del sistema $Y' = CY$, con $b > 0$

Referencias

[1] Departamento de Matemática Aplicada II. Universidad de Sevilla. Tema 11.- Autovalores y Autovectores `http://personal.us.es/ealgaba/algebra%20=04-05/TEMA11.pdf`

[2] A. Osses. Apunte del curso: Ecuaciones diferenciales ordinarias