Descomposición en forma canónica de Jordan (Segunda versión)

Francisco J. Bravo S.

1 de septiembre de 2011

En esta guía se presentan los resultados necesarios para poder construir la forma de Jordan sin entrar en detalles teóricos. Se asume que el lector esta familiarizado con los procedimientos para calcular valores y vectores propios. Los interesados en profundizar los resultados teóricos pueden consultar el libro *The Theory of Matrices* de Peter Lancaster.

1. Introducción

Para muchas ramas de la matemática, como en las ecuaciones diferenciales, o en procesos estocásticos, resulta de gran utilidad para los desarrollos teóricos y aplicaciones el poder descomponer matrices en la forma:

$$A = PDP^{-1}, \qquad \text{con} \quad D \quad \text{matriz diagonal}$$

Cuando una matriz puede escribirse de esta forma, se dice que es diagonalizable. Lamentablemente, no todas las matrices son diagonalizables. Es por eso que en algebra lineal se destaque el siguiente teorema

Teorema 1 *Toda matriz simétrica es diagonalizable*

El objetivo de esta guía es introducir la noción de Forma canónica de Jordan, una descomposición que generaliza a la diagonalización y que también tiene la particularidad de facilitar los cálculos. Lo importante de esta última descomposición es que toda matriz puede ser llevada a su forma canónica, esto es, toda matriz A puede se escrita de la forma:

$$M = PJP^{-1}, \qquad \text{con} \quad J \quad \text{matriz de Jordan}$$

2. Conceptos previos

- Para una matriz A, su polinomio característico, en el plano complejo, viene determinado por

  $$det(A - \lambda I) = -(\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$$

  donde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ son raíces diferentes. A m_i se le llama *multiplicidad algebraica* de λ_i

- Se llama subespacio propio de λ_i, al espacio S_i formado por los vectores v tales que

  $$(A - \lambda_i I)v = 0$$

  A r_i, la dimensión del espacio propio de λ_i, se le dice *multiplicidad geométrica* de λ_i

Teorema 2 *Para cada valor propio λ_i, se cumple:*

$$1 \leq r_i \leq m_i$$

Teorema 3 *A es diagonalizable si y sólo si*

$$r_i = m_i$$

Corolario 1 *Si $m_i = 1$ para todo valor propio λ_i (esto es, si hay exactamente n raíces diferentes del polinomio característico), entonces A es diagonalizable.*

Estudiaremos el caso cuando la matriz resulta no diagonalizable, que por teorema (3) se tiene para $r_i < m_i$, esto es, cuando se obtienen menos vectores propios que la multiplicidad de λ_i. En este caso, si deseamos calcular la forma de jordan, necesitamos obtener de alguna manera $m_i - r_i$ vectores. A estos vectores que necesitamos, se denominan *vectores propios generalizados.*

Dado un vector propio v, el vector propio generalizado v_1 se obtiene resolviendo el sistema

$$(A - \lambda_i)v_1 = v$$

Si para completar el espacio necesitamos otro vector generalizado v_2, es posible obtenerlo resolviendo el sistema

$$(A - \lambda_i)v_2 = v_1$$

y así sucesivamente.

Los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_s$ así obtenidos forman una cadena, que llamaremos la *cadena de Jordan de largo s asociada al vector propio v*

Usaré en lo siguiente la notación $v \hookrightarrow v_1 \hookrightarrow v_2 \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow v_s$ para denotar a la cadena de Jordan obtenida a partir de v

Supongamos que tenemos una matriz A tiene un valor propio λ de multiplicidad algebraica 5 y multiplicidad geométrica 3 (esto es, tenemos 3 vectores propios u, v y w asociados a λ). Luego, tenemos que obtener los 2 vectores restantes (vectores propios generalizados). Dichos vectores pueden ser obtenidos con sólo uno de estos esquemas:

$$\left\{\begin{array}{ccc} u & \hookrightarrow & u_1 \\ v & \hookrightarrow & v_1 \\ w & & \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ccc} u & \hookrightarrow & u_1 \\ v & & \\ w & \hookrightarrow & w_1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ccc} u & & \\ v & \hookrightarrow & v_1 \\ w & \hookrightarrow & w_1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ccccc} u & \hookrightarrow & u_1 & \hookrightarrow & u_2 \\ v & & & & \\ w & & & & \end{array}\right. \left\{\begin{array}{ccccc} u & & & & \\ v & \hookrightarrow & v_1 & \hookrightarrow & v_2 \\ w & & & & \end{array}\right. \left\{\begin{array}{ccccc} u & & & & \\ v & & & & \\ w & \hookrightarrow & w_1 & \hookrightarrow & w_2 \end{array}\right.$$

Esta situación nos causa un problema. Al comenzar a calcular los vectores generalizados, no sabemos cuantas cadenas calcular, ni el tamaño de cada una de ellas (imagina todas las combinaciones resultantes si sólo tuviéramos 2 vectores propios, o que la multiplicidad algebraica de λ fuera mayor). El siguiente teorema nos permite resolver este problema

Teorema 4 *El número k_s de cadenas de Jordan de largo s es*

$$k_s = 2l_s - l_{s-1} - l_{s+1}$$

donde

- $l_0 = 0$
- $l_s = \dim \ker(A - \lambda I)^s$, *para* $s > 0$

Además, si $l_{s+1} = l_s$, entonces $l_p = l_s$, para todo $p \geq s$

Con estos conceptos, procedemos a estudiar la forma que tendrá la matriz de Jordan, la cual va a depender del número de cadenas que se necesiten formar para completar los vectores necesarios

3. Forma canónica de Jordan

1. **Bloque de Jordan** (de tamaño $K \times K$ y valor propio λ)
   Son las matrices de la forma

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

   Esto es, matrices tridiagonales, con diagonal principal de valor λ, diagonal superior de valor 1, y diagonal inferior de ceros

2. **Suprabloque de Jordan** (de tamaño $m \times m$ y valor propio λ)
   Son las matrices cuya diagonal son Bloques de Jordan **de igual valor propio**

   Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} & & \\ & \begin{bmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} & \\ & & [7] \end{pmatrix}$$

3. Una matriz está escrita en **forma canónica de Jordan** si es diagonal por bloques, formada por suprabloques de Jordan.

Ejemplo: La siguiente matriz, escrita en la forma canónica de Jordan, está formada por

- un suprabloque de tamaño 2 y valor propio 8, formado a su vez por dos bloques de tamaño 1
- un suprabloque de tamaño 3 y valor propio 3, formado un bloque de tamaño 1 y otro de tamaño 2; y
- un suprabloque de tamaño 1 y valor propio 4.

$$A = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} [8] & 0 \\ 0 & [8] \end{bmatrix} & & \\ & \begin{bmatrix} [3] & \\ & \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \end{bmatrix} & \\ & & [4] \end{pmatrix}$$

Observación: Las matrices diagonales son un caso particular de la forma canónica de Jordan.

4. Construcción de la Forma canónica de Jordan

Cuando tenemos una matriz que es diagonalizable, en su descomposición $A = PDP^{-1}$, colocamos sus valores propios en la diagonal de la matriz D, y en la matriz P se van colocando como columnas los vectores propios correspondientes a cada valor propio.

Para una matriz que no es necesariamente diagonalizable, podemos encontrar su descomposición en la forma canónica de una manera similar. La construcción de dicha matriz es la siguiente:

1. En la matriz J, se colocan los n valores propios en la diagonal. Así, si el polinomio característico de la matriz es

$$-(\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$$

entonces se deben colocar m_1 veces el valor λ_1, m_2 veces el valor λ_2, y asi sucesivamente. Los m_i valores propios λ_i, forman un suprabloque de Jordan.

2. Si para cada valor λ_i, existen l cadenas, entonces el suprabloque de Jordan de valor λ_i estará compuesto por l bloques, y las dimensiones de cada bloque corresponderá al largo de cada cadena que le corresponde.

3. Finalmente, en la matriz P, se van colocando los vectores propios, y si hay cadenas, se colocan los elementos de la cadena de la manera como fueron obtenidas.

Bueno, esta cuestión parece chino, pero veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo: Consideremos la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A primera vista no parece una matriz de Jordan, pero si entendimos el procedimiento se puede ver que sí.

Primero, los valores propios iguales (que se encuentran en la diagonal) forman los suprabloques. Así:

$$A = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} & & \\ & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \\ & & [1] \end{pmatrix}$$

Ahora, debemos identificar los bloques que que forman los suprabloques.

- En el suprabloque de valor propio 7, como no hay 1's, se tiene que dicho suprabloque esta formado por 2 bloques de Jordan de tamaño 1.
- En el suprabloque de valor propio 0, vemos que hay un 1, luego, dicho suprabloque esta formado por 2 bloques, uno de tamaño 1, y el otro de tamaño 2.
- El ultimo suprabloque, el de valor 3, esta formado por un bloque de tamaño 1.

Así

$$A = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} [7] & 0 \\ 0 & [7] \end{bmatrix} & & \\ & \begin{bmatrix} 0 & \\ & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} & \\ & & [1] \end{pmatrix}$$

De este modo, sabemos además la forma de como se obtuvieron los vectores propios:

- Para el valor propio 7, que tiene multiplicidad 2, se pudieron obtener 2 vectores propios
- Para el valor propio 0, de multiplicidad 3, sólo se tienen 2 valores propios, el tercero faltante es un vector propio generalizado, por lo cual aparece el bloque de Jordan de tamaño 2
- El valor propio 1, tiene su vector propio correspondiente.

Ejemplo 2 Sea A matriz 4×4 con un vector propio λ de multiplicidad 4. Describa las posibles formas de Jordan dependiendo de las multiplicidades geométricas.

Solución:

$$\begin{bmatrix} 4 & & & \\ & 4 & & \\ & & 4 & \\ & & & 4 \end{bmatrix}$$

Mult. geométrica=4 =Mult. algebraica
luego, la matriz es diagonalizable

$$\begin{bmatrix} 4 & \\ & \begin{bmatrix} 4 & 1 & \\ & 4 & 1 \\ & & 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

mult. geométrica=2

$$\begin{cases} u & \\ v & \hookrightarrow \quad v_1 \quad \hookrightarrow \quad v_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ & 4 \end{bmatrix} & \\ & \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ & 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

mult. geométrica=2

$$\begin{cases} u & \hookrightarrow \quad u_1 \\ v & \hookrightarrow \quad v_1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & & \\ & 4 & 1 & \\ & & 4 & 1 \\ & & & 4 \end{bmatrix}$$

Mult. geométrica =1

$$\{ \; u \quad \hookrightarrow \quad u_1 \quad \hookrightarrow \quad u_2 \quad \hookrightarrow \quad u_3$$

Para cada uno de los 4 casos, en la matriz P de la descomposición $A = PJP^{-1}$, los vectores obtenidos deben ser colocado en las columnas de P en el orden que indica el esquema, así para cada caso ,las matrices P respectivas son

$$[u, v, w, x], \quad [u, v_1, v_2, v_3], \quad [u, u_1, v, v_1], \quad [u, u_1, u_2, u_3]$$

Teorema 5 (Cayley-Hamilton) *Sea $p(x)$ el polinomio característico de la matriz A, entonces*

$$p(A) = 0$$

Este particular y útil teorema, que para esta guía no sirve de nada, sólo lo coloco porque es interesante como resultado teórico. Cabe destacar que se puede demostrar usando la descomposición en la forma canónica de Jordan de matrices.

Problema 1 Llevar a su forma de Jordan la siguiente matriz

$$\begin{bmatrix} -2{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & -2 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 0 & -1{,}5 \end{bmatrix}$$

Solución El polinomio característico es $(\lambda+2)^3$ (verificar). Por lo tanto, $\lambda=-2$ es el único valor propio, de multiplicidad 3. Calculemos sus vectores propios.

$$(A-2I)v=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 0 & 0{,}5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Este sistema nos dice que $v_1=v_3$, y que v_2 es cualquiera. Por lo tanto en este caso podemos elegir los 2 vectores propios: $u=[1,0,1]$ y $v=[0,1,0]$.

Ahora debemos determinar el autovector generalizado restante. Este autovector no necesariamente es proyección de alguno de éstos dos vectores u ó v , sino que en general será de alguna combinación lineal de los mismos :

$$(A-2I)w=\alpha u+\beta v \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 0 & 0{,}5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha \end{bmatrix}$$

Y este conjunto de ecuaciones tendrán una solución posible, siempre que $\alpha=-\beta$. Por lo tanto el autovector sobre el cual el autovector generalizado se proyecta es $[1,-1,1]$: El autovector generalizado w deberá cumplir que:

$$(A-2I)w=\alpha u+\beta v \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 0 & 0{,}5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Luego $-\frac{w_1}{2}+\frac{w_3}{2}=1$, con w_2 libre.

Así los vectores solución a este sistema son los de la forma

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ 0 \\ 2+w_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como el vector [0, 1, 0] ya lo teníamos considerado, eligiendo $w_1=1$, obtenemos el vector $[1,0,3]$

De este modo, la forma normal de Jordan de la matriz A es

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}$$

Observación: Los vectores propios que uno elige son una base posible del espacio propio. Cualquier combinación lineal de estos vectores también resultan ser una base del espacio. Es decir, si v_1 y v_2 son los vectores propios asociados a λ, entonces $< v_1, v_2 >$ forman una base del espacio propio, como también $< v_1 - v_2, v_1 + v_2 >$, pues $v_1 + v_2$ y $v_1 - v_2$ son vectores propios (en general cualquier combinación lineal $\alpha v_1 + \beta v_2$ es vector propio, lo cual es muy fácil de verificar).

Referencias

[1] Forma canónica de Jordan y resolución de ecuaciones diferenciales lineales a coeficientes constantes.(1996). E. Catsigeras `http://es.scribd.com/doc/55505320/Jordan`

[2] A. Osses. Apunte del curso: Ecuaciones diferenciales ordinarias