

An introduction to Sweeping Process

Emilio Vilches^{1,2}

¹Departamento de Ingeniería Matemática
Universidad de Chile

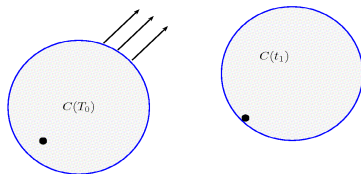
²Institut de Mathématiques de Bourgogne
Université de Bourgogne

December 28, 2015
Santiago, Chile.

- 1 Introducción
- 2 Herramientas de Análisis Convexo
- 3 Un teorema de existencia
- 4 Extensiones
- 5 References

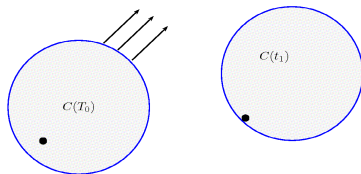
Introducción

Considere un aro que contiene una partícula. El aro comienza a moverse en $t = T_0$. Dependiendo del movimiento del anillo, la partícula permanecerá quieta (en caso que no golpee el anillo) o será arrastrada o barrida hacia su interior. En este último caso la velocidad de la partícula tiene que apuntar hacia el interior del aro debido a que no puede escapar.



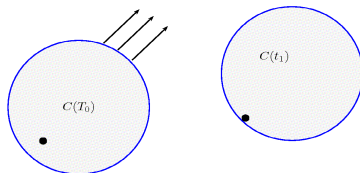
Introducción

Considere un aro que contiene una partícula. El aro comienza a moverse en $t = T_0$. Dependiendo del movimiento del anillo, la partícula permanecerá quieta (en caso que no golpee el anillo) o será arrastrada o barrida hacia su interior. En este último caso la velocidad de la partícula tiene que apuntar hacia el interior del aro debido a que no puede escapar.



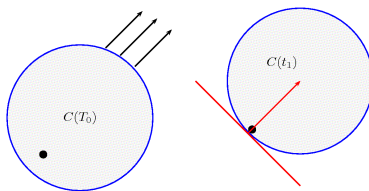
Introducción

Considere un aro que contiene una partícula. El aro comienza a moverse en $t = T_0$. Dependiendo del movimiento del anillo, la partícula permanecerá quieta (en caso que no golpee el anillo) o será arrastrada o barrida hacia su interior. En este último caso la velocidad de la partícula tiene que apuntar hacia el interior del aro debido a que no puede escapar.



Introducción

Considere un aro que contiene una partícula. El aro comienza a moverse en $t = T_0$. Dependiendo del movimiento del anillo, la partícula permanecerá quieta (en caso que no golpee el anillo) o será arrastrada o barrida hacia su interior. En este último caso la velocidad de la partícula tiene que apuntar hacia el interior del aro debido a que no puede escapar.



Introducción

Matemáticamente,

$$\begin{cases} -x'(t) \in N(C(t); (x(t))) \text{ c.t.p. in } [T_0, T] \\ x(T_0) = x_0 \in C(T_0), \end{cases} \quad (1.1)$$

donde $x(t)$ es la posición de la partícula en el tiempo t , mientras que $C(t)$ es el conjunto (comprendiendo) el aro en el tiempo t .

La expresión $N(C(t); (x(t)))$ denota el cono normal exterior al conjunto $C(t)$ en la posición $x(t)$.

En general, al conjunto $C(t)$ se le permite cambiar de forma mientras se mueve.

Introducción

Matemáticamente,

$$\begin{cases} -x'(t) \in N(C(t); (x(t))) \text{ c.t.p. in } [T_0, T] \\ x(T_0) = x_0 \in C(T_0), \end{cases} \quad (1.1)$$

donde $x(t)$ es la posición de la partícula en el tiempo t , mientras que $C(t)$ es el conjunto (comprendiendo) el aro en el tiempo t .

La expresión $N(C(t); (x(t)))$ denota el cono normal exterior al conjunto $C(t)$ en la posición $x(t)$.

En general, al conjunto $C(t)$ se le permite cambiar de forma mientras se mueve.

Introducción

Matemáticamente,

$$\begin{cases} -x'(t) \in N(C(t); (x(t))) \text{ c.t.p. in } [T_0, T] \\ x(T_0) = x_0 \in C(T_0), \end{cases} \quad (1.1)$$

donde $x(t)$ es la posición de la partícula en el tiempo t , mientras que $C(t)$ es el conjunto (comprendiendo) el aro en el tiempo t .

La expresión $N(C(t); (x(t)))$ denota el cono normal exterior al conjunto $C(t)$ en la posición $x(t)$.

En general, al conjunto $C(t)$ se le permite cambiar de forma mientras se mueve.

Introducción

Matemáticamente,

$$\begin{cases} -x'(t) \in N(C(t); (x(t))) \text{ c.t.p. in } [T_0, T] \\ x(T_0) = x_0 \in C(T_0), \end{cases} \quad (1.1)$$

donde $x(t)$ es la posición de la partícula en el tiempo t , mientras que $C(t)$ es el conjunto (comprendiendo) el aro en el tiempo t .

La expresión $N(C(t); (x(t)))$ denota el cono normal exterior al conjunto $C(t)$ en la posición $x(t)$.

En general, al conjunto $C(t)$ se le permite cambiar de forma mientras se mueve.

- 1 Introducción
- 2 Herramientas de Análisis Convexo**
- 3 Un teorema de existencia
- 4 Extensiones
- 5 References

Herramientas de análisis convexo

Sea H un espacio de Hilbert separable y $C \subset X$ un conjunto convexo.

- 1 Para $x \in C$ se define el cono normal

$$N(C; x) = \{z \in H: \langle z, y - x \rangle \leq 0 \text{ para todo } y \in C\}.$$

- 2 Se define la función distancia al conjunto C como $d_C(x) = \inf_{y \in C} \|x - y\| = \|x - \text{proy}_C(x)\|$, donde $\text{proy}_C(x)$ es la proyección de x sobre C .

Herramientas de análisis convexo

Para cada $x \in H$ se tiene

$$x - \text{proy}_C(x) \in N_C(\text{proy}_C(x)) \quad x \in H.$$

$$(I + N_C(\cdot))^{-1}(x) = \text{proy}_C(x) \quad x \in H.$$

Herramientas de análisis convexo

Para cada $x \in H$ se tiene

$$x - \text{proy}_C(x) \in N_C(\text{proy}_C(x)) \quad x \in H.$$

$$(I + N_C(\cdot))^{-1}(x) = \text{proy}_C(x) \quad x \in H.$$

Distancia de Hausdorff

Para $C, D \subset H$ cerrados, se define la distancia de Hausdorff entre C y D como:

$$H(C, D) = \max\left\{\sup_{x \in C} d_D(x), \sup_{x \in D} d_C(x)\right\}.$$

Además, se puede mostrar que

$$\begin{aligned} H(C, D) &= \sup_{x \in H} |d_C(x) - d_D(x)| \\ &= \inf \{ \eta \geq 0 : C \subset D + \eta \mathbb{B}, D \subset C + \eta \mathbb{B} \}. \end{aligned}$$

Multipliación Lipschitz

Sea $C: [T_0, T] \Rightarrow H$ una multipliación. Diremos que C es κ -Lipschitz si

$$H(C(t), C(s)) \leq \kappa |t - s| \quad \text{para todo } t, s \in [T_0, T].$$

Además, C es κ -Lipschitz si

$$C(t) \subseteq C(s) + \kappa |t - s| \mathbb{B} \quad \text{para todo } t, s \in [T_0, T].$$

Multiaplicación Lipschitz

Sea $C: [T_0, T] \rightrightarrows H$ una multiaplicación. Diremos que C es κ -Lipschitz si

$$H(C(t), C(s)) \leq \kappa |t - s| \quad \text{para todo } t, s \in [T_0, T].$$

Además, C es κ -Lipschitz si

$$C(t) \subseteq C(s) + \kappa |t - s| \mathbb{B} \quad \text{para todo } t, s \in [T_0, T].$$

- 1 Introducción
- 2 Herramientas de Análisis Convexo
- 3 Un teorema de existencia**
- 4 Extensiones
- 5 References

Un teorema de existencia

Theorem (Moreau 1971)

Supongamos que $C: [T_0, T] \rightrightarrows H$ es una multiaplicación κ -Lipschitz con valores convexos y cerrados. Entonces existe una y sólo una solución de

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in N(C(t); x(t)) & \text{c.t.p. } t \in [T_0, T]. \\ x(T_0) = x_0 \in C(T_0). \end{cases} \quad (SP)$$

Demostración: Unicidad

Demostración: Existencia

Sea $\pi_n = \{t_0^n, \dots, t_n^n\}$ una partición de $[T_0, T]$ y para $0 \leq i \leq n-1$ definamos $I_i^n :=]t_i^n, t_{i+1}^n]$.

Idea: sobre cada I_i^n usar la discretización implícita:

$$\frac{x_{i+1}^n - x_i^n}{t_{i+1}^n - t_i^n} \approx \dot{x}(t) \in -N(C(t); x(t)) \approx -N(C(t_{i+1}^n); x_{i+1}^n).$$

Esto es equivalente a

$$x_i^n \in \left(I + N_{C(t_{i+1}^n)}(\cdot) \right) (x_{i+1}^n)$$

Demostración: Existencia

Sea $\pi_n = \{t_0^n, \dots, t_n^n\}$ una partición de $[T_0, T]$ y para $0 \leq i \leq n-1$ definamos $I_i^n :=]t_i^n, t_{i+1}^n]$.

Idea: sobre cada I_i^n usar la discretización implícita:

$$\frac{x_{i+1}^n - x_i^n}{t_{i+1}^n - t_i^n} \approx \dot{x}(t) \in -N(C(t); x(t)) \approx -N(C(t_{i+1}^n); x_{i+1}^n).$$

Esto es equivalente a

$$x_i^n \in \left(I + N_{C(t_{i+1}^n)}(\cdot) \right) (x_{i+1}^n)$$

Por lo tanto,

$$x_{i+1}^n = \text{proy}_{C(t_{i+1}^n)}(x_i^n) \quad \text{“Catching-up algorithm”,}$$

$$x_0^n = x_0 \in C(T_0).$$

Demostración: Existencia

Así, para cada $n \in \mathbb{N}$ se define la función x_n como:
para $t = T_0$ $x_n(T_0) = x_0$, para $t \in I_i^n$ ($0 \leq i \leq n-1$)

$$x_n(t) = x_i^n + \frac{(x_{i+1}^n - x_i^n)}{t_{i+1}^n - t_i^n}(t - t_i^n).$$

Demostración: Existencia

Se tiene que



$$d_C(r_{i+1}^n)(x_i^n) \leq \kappa |t_{i+1}^n - t_i^n| \quad \text{para } 0 \leq i \leq n-1.$$

- $x_n(\cdot)$ es κ -Lipschitz continua sobre $[T_0, T]$.

$$\|\dot{x}_n(t)\| \leq \kappa \quad \text{c.t.p } t \in [T_0, T].$$

Demostración: Existencia

Se tiene que



$$d_C(x_i^n, x_{i+1}^n) \leq \kappa |t_{i+1}^n - t_i^n| \quad \text{para } 0 \leq i \leq n-1.$$

- $x_n(\cdot)$ es κ -Lipschitz continua sobre $[T_0, T]$.

$$\|\dot{x}_n(t)\| \leq \kappa \quad \text{c.t.p } t \in [T_0, T].$$

Demostración: Existencia

Se tiene que



$$d_{C(t_{i+1}^n)}(x_i^n) \leq \kappa |t_{i+1}^n - t_i^n| \quad \text{para } 0 \leq i \leq n-1.$$

- $x_n(\cdot)$ es κ -Lipschitz continua sobre $[T_0, T]$.

$$\|\dot{x}_n(t)\| \leq \kappa \quad \text{c.t.p } t \in [T_0, T].$$

Demostración: Existencia

Sea $\theta_n: [T_0, T] \rightarrow [T_0, T]$ la función definida por

$$\theta_n(t) = \begin{cases} T_0 & \text{si } t = T_0, \\ t_{i+1}^n & \text{si } t \in I_i^n \text{ para } 0 \leq i \leq n-1. \end{cases}$$

Luego,

$$\begin{cases} \dot{x}_n(t) \in -N(C(\theta_n(t)); x_n(\theta_n(t))) & \text{c.t.p } t \in [T_0, T], \\ x_n(T_0) = x_0. \end{cases}$$

Demostración: Existencia

Sea $\theta_n: [T_0, T] \rightarrow [T_0, T]$ la función definida por

$$\theta_n(t) = \begin{cases} T_0 & \text{si } t = T_0, \\ t_{i+1}^n & \text{si } t \in I_i^n \text{ para } 0 \leq i \leq n-1. \end{cases}$$

Luego,

$$\begin{cases} \dot{x}_n(t) \in -N(C(\theta_n(t)); x_n(\theta_n(t))) & \text{c.t.p } t \in [T_0, T], \\ x_n(T_0) = x_0. \end{cases}$$

Demostración: Existencia

- $(x_n)_n$ es de Cauchy en $C([T_0, T]; H)$ y, por lo tanto, converge a cierto $x \in C([T_0, T]; H)$.

Demostración: Existencia

Falta demostrar que:

- $x(t) \in C(t)$ para todo $t \in [T_0, T]$.
- x es solución de (SP) .

Demostración: Existencia

Falta demostrar que:

- $x(t) \in C(t)$ para todo $t \in [T_0, T]$.
- x es solución de (SP) .

Demostración: Existencia

Theorem (Dunford-Pettis)

Si (Ω, Σ, μ) es un espacio de medida finita, H es Hilbert y $K \subset K^1(\Omega; X)$ es acotado. Entonces K es relativamente débilmente compacto en $L^1(\Omega; X)$ si y sólo si K es relativamente integrable.

Demostración: Existencia

- $K := \{\dot{x}_n(\cdot) : n \in \mathbb{N}\}$ es relativamente débilmente compacto en $L^1([T_0, T]; H)$.

Demostración: Existencia

Theorem

Sea (Ω, Σ, μ) es un espacio de medida finita y H es un espacio de Hilbert. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada en $L^\infty(\Omega; H)$ y $u \in L^1(\Omega; H)$, u_n converge débilmente a u en $L^1(\Omega; H)$ y μ -c.t.p. para todo $w \in \Omega$, la sucesión $(u_n(w))_{n \in \mathbb{N}}$ es relativamente débilmente compacto. Entonces

$$u(w) \in \overline{\text{conv}} w\text{-} \limsup \{u_n(w)\} \quad \text{para } \mu\text{-c.t.p. } w \in \Omega.$$

Usando, el Teorema (3) se puede concluir que $x(\cdot)$ es solución de (SP) .

Demostración: Existencia

Theorem

Sea (Ω, Σ, μ) es un espacio de medida finita y H es un espacio de Hilbert. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada en $L^\infty(\Omega; H)$ y $u \in L^1(\Omega; H)$, u_n converge débilmente a u en $L^1(\Omega; H)$ y μ -c.t.p. para todo $w \in \Omega$, la sucesión $(u_n(w))_{n \in \mathbb{N}}$ es relativamente débilmente compacto. Entonces

$$u(w) \in \overline{\text{conv}} w\text{-} \limsup \{u_n(w)\} \quad \text{para } \mu\text{-c.t.p. } w \in \Omega.$$

Usando, el Teorema (3) se puede concluir que $x(\cdot)$ es solución de (SP) .

- 1 Introducción
- 2 Herramientas de Análisis Convexo
- 3 Un teorema de existencia
- 4 Extensiones**
- 5 References

Algunas extensiones

- Sweeping process con variación acotada.
- Sweeping process perturbados.
- Sweeping process de segundo orden.
- El caso no convexo.

Algunas extensiones

- Sweeping process con variación acotada.
- Sweeping process perturbados.
- Sweeping process de segundo orden.
- El caso no convexo.

Algunas extensiones

- Sweeping process con variación acotada.
- Sweeping process perturbados.
- Sweeping process de segundo orden.
- El caso no convexo.

Algunas extensiones

- Sweeping process con variación acotada.
- Sweeping process perturbados.
- Sweeping process de segundo orden.
- El caso no convexo.

An introduction to Sweeping Process

Emilio Vilches^{1,2}

¹Departamento de Ingeniería Matemática
Universidad de Chile

²Institut de Mathématiques de Bourgogne
Université de Bourgogne

December 28, 2015
Santiago, Chile.

¡Gracias!

- 1 Introducción
- 2 Herramientas de Análisis Convexo
- 3 Un teorema de existencia
- 4 Extensiones
- 5 References**

- [1] H. Benabdellah, Existence of solutions to nonconvex sweeping process, J. Differential Equations 164 (2000), 286-295.
- [2] H. Brezis, Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert, North-Holland, Amsterdam, 1973.
- [3] Brogliato, B., Nonsmooth Mechanics, 2nd Edition, Springer CCES, London, 1999.
- [4] C. Castaing, T.X. Duc Ha and M. Valadier, Evolution equations governed by sweeping process, Set-Valued Analysis 1 (1993), 109-139.
- [5] Clarke, F. H.; Ledyaev, Yu. S.; Stern, R. J.; Wolenski, P. R. Nonsmooth analysis and control theory. Graduate Texts in Mathematics, 178. Springer-Verlag, New York, 1998.

- [6] G. Colombo and V.V. Goncharov, The sweeping process without convexity, Set-Valued Analysis. 7 (1999), 357-374.
- [7] B. Cornet, Existence of slow solutions for a class of differential inclusions, J. Math. Anal. Appl. Vol. 96, (1973), 179-186.
- [8] K. Deimling, "Multivalued Differential Equations," Walter de Gruyter, Berlin, 1992.
- [9] L.A. Faik, A. Syam, Differential inclusions governed by a nonconvex sweeping process, J. Nonlin. Convex Anal., 2 (2001), 381-392.
- [10] C. Henry, An existence theorem for a class of differential equations with multivalued right-hand side, J. Math. Anal. Appl. 41 (1971), 179-186.

- [11] M.D.P.Monteiro Marques, Differential inclusions in Nonsmooth Mechanical Problems, Shocks and Dry Friction. Birkhäuser, Basel, (1993).
- [12] B.S. Mordukhovich, Variational analysis and generalized differentiation, I: Basic theory; II: Applications}, Vol. 330 and 331, Springer, Berlin, (2006).
- [13] J.J. Moreau, Raflé par un convexe variable I. Sémin. Anal. Convexe Montpellier, Exposé 15, (1971).
- [14] J.J. Moreau, Raflé par un convexe variable II. Sémin. Anal. Convexe Montpellier, Exposé 3, (1972).
- [15] J.J. Moreau, Multi-applications à rétraction finie, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 1 (1974), 169-203.

- [16] J.J. Moreau, Evolution problem associated with a moving convex set in a Hilbert space, J. Differential Equations 26 (1977), 347-374.
- [17] R.A. Poliquin; R.T. Rockafellar and L. Thibault, Local differentiability of distance functions, Trans. Amer. Math. Soc., 352(2000), 5231-5249.
- [18] L. Thibault, Sweeping process with regular and nonregular sets, J. Differential Equations 193 (2003), 1-26.
- [19] M. Valadier, Quelques problèmes d'entraînement unilatéral en dimension finie, Sémin. Anal. Convexe Montpellier Exposé No. 8, (1988).