Geometría

17 de agosto de 2007

Producto cruz en $\mathbb{R}^3$

Utilizaremos la siguiente notación,

$$\widehat{\mathbf{i}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \widehat{\mathbf{j}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \widehat{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Se cumplen las siguientes

Propiedades

1. $\left\|\widehat{\mathbf{i}}\right\| = \left\|\widehat{\mathbf{j}}\right\| = \left\|\widehat{\mathbf{k}}\right\| = 1$ (Estos vectores se dicen *unitarios*.)
2. $\widehat{\mathbf{i}} \perp \widehat{\mathbf{j}} \wedge \widehat{\mathbf{k}} \perp \widehat{\mathbf{k}} \wedge \widehat{\mathbf{k}} \perp \widehat{\mathbf{i}}$ (Son ortogonales entre sí.)
3. $\left(\forall \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3\right)$ $\mathbf{x} = x_1\widehat{\mathbf{i}} + x_2\widehat{\mathbf{j}} + x_3\widehat{\mathbf{k}}$, y esta escritura es única.

Producto cruz en $\mathbb{R}^3$

Utilizaremos la siguiente notación,

$$\widehat{\mathbf{i}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \widehat{\mathbf{j}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \widehat{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Se cumplen las siguientes

Propiedades

1. $\left\|\widehat{\mathbf{i}}\right\| = \left\|\widehat{\mathbf{j}}\right\| = \left\|\widehat{\mathbf{k}}\right\| = 1$ (Estos vectores se dicen *unitarios*.)
2. $\widehat{\mathbf{i}} \perp \widehat{\mathbf{j}} \wedge \widehat{\mathbf{k}} \perp \widehat{\mathbf{k}} \wedge \widehat{\mathbf{k}} \perp \widehat{\mathbf{i}}$ (Son ortogonales entre sí.)
3. $\left(\forall \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3\right)$ $\mathbf{x} = x_1\widehat{\mathbf{i}} + x_2\widehat{\mathbf{j}} + x_3\widehat{\mathbf{k}}$, y esta escritura es única.

Producto cruz en $\mathbb{R}^3$

Utilizaremos la siguiente notación,

$$\widehat{\mathbf{i}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \widehat{\mathbf{j}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \widehat{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Se cumplen las siguientes

Propiedades

1. $\left\|\widehat{\mathbf{i}}\right\| = \left\|\widehat{\mathbf{j}}\right\| = \left\|\widehat{\mathbf{k}}\right\| = 1$ (Estos vectores se dicen *unitarios*.)
2. $\widehat{\mathbf{i}} \perp \widehat{\mathbf{j}} \wedge \widehat{\mathbf{k}} \perp \widehat{\mathbf{k}} \wedge \widehat{\mathbf{k}} \perp \widehat{\mathbf{i}}$ (Son ortogonales entre sí.)
3. $\left(\forall \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3\right)$ $\mathbf{x} = x_1\widehat{\mathbf{i}} + x_2\widehat{\mathbf{j}} + x_3\widehat{\mathbf{k}}$, y esta escritura es única.

Producto cruz en $\mathbb{R}^3$

Utilizaremos la siguiente notación,

$$\widehat{\mathbf{i}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \widehat{\mathbf{j}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \widehat{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Se cumplen las siguientes

Propiedades

1. $\left\|\widehat{\mathbf{i}}\right\| = \left\|\widehat{\mathbf{j}}\right\| = \left\|\widehat{\mathbf{k}}\right\| = 1$ (Estos vectores se dicen *unitarios*.)
2. $\widehat{\mathbf{i}} \perp \widehat{\mathbf{j}} \wedge \widehat{\mathbf{k}} \perp \widehat{\mathbf{k}} \wedge \widehat{\mathbf{k}} \perp \widehat{\mathbf{i}}$ (Son ortogonales entre sí.)
3. $\left(\forall \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3\right)$ $\mathbf{x} = x_1\widehat{\mathbf{i}} + x_2\widehat{\mathbf{j}} + x_3\widehat{\mathbf{k}}$, y esta escritura es única.

Producto cruz en $\mathbb{R}^3$

Notación

Si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, anotamos $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \in \mathbb{R}$.

Producto cruz

Si $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, definimos el *producto cruz* o *producto vectorial* de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ como el siguiente vector de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{vmatrix} \widehat{\mathbf{i}} & \widehat{\mathbf{j}} & \widehat{\mathbf{k}} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \widehat{\mathbf{i}} - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \widehat{\mathbf{j}} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \widehat{\mathbf{k}}.$$

Es decir:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Producto cruz en $\mathbb{R}^3$

Notación

Si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, anotamos $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \in \mathbb{R}$.

Producto cruz

Si $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, definimos el *producto cruz* o *producto vectorial* de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ como el siguiente vector de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{vmatrix} \widehat{\mathbf{i}} & \widehat{\mathbf{j}} & \widehat{\mathbf{k}} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \widehat{\mathbf{i}} - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \widehat{\mathbf{j}} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \widehat{\mathbf{k}}.$$

Es decir:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Producto cruz en $\mathbb{R}^3$

Notación

Si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, anotamos $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \in \mathbb{R}$.

Producto cruz

Si $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, definimos el *producto cruz* o *producto vectorial* de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ como el siguiente vector de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{vmatrix} \widehat{\mathbf{i}} & \widehat{\mathbf{j}} & \widehat{\mathbf{k}} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \widehat{\mathbf{i}} - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \widehat{\mathbf{j}} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \widehat{\mathbf{k}}.$$

Es decir:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Producto cruz en $\mathbb{R}^3$: Propiedades

Propiedades

1. $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3)\ \mathbf{x} \times \mathbf{y} \perp \mathbf{x} \wedge \mathbf{x} \times \mathbf{y} \perp \mathbf{y}$.
2. $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3)\ \mathbf{x} \times \mathbf{y} = -\mathbf{y} \times \mathbf{x}$ ($\times$ es *anti–conmutativo*).
3. $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3)\ \mathbf{x} \times (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \times \mathbf{y} + \mathbf{x} \times \mathbf{z} \wedge (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \times \mathbf{z} = \mathbf{x} \times \mathbf{z} + \mathbf{y} \times \mathbf{z}$ ($\times$ distribuye sobre $+$).
4. $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3)\ (\forall \lambda \in \mathbb{R})\ (\lambda \mathbf{x}) \times \mathbf{y} = \mathbf{x} \times (\lambda \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x} \times \mathbf{y})$.
5. $(\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3)\ \mathbf{x} \times \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
6. $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{z} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle \mathbf{y} - \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle \mathbf{x}$.
7. $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3)\ \mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) + \mathbf{y} \times (\mathbf{z} \times \mathbf{x}) + \mathbf{z} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = \mathbf{0}$.
   Identidad de Jacobi.

Producto cruz en $\mathbb{R}^3$: Propiedades

Propiedades

1. $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3)\ \mathbf{x} \times \mathbf{y} \perp \mathbf{x} \wedge \mathbf{x} \times \mathbf{y} \perp \mathbf{y}$.
2. $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3)\ \mathbf{x} \times \mathbf{y} = -\mathbf{y} \times \mathbf{x}$ ($\times$ es *anti–conmutativo*).
3. $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3)\ \mathbf{x} \times (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \times \mathbf{y} + \mathbf{x} \times \mathbf{z} \wedge (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \times \mathbf{z} = \mathbf{x} \times \mathbf{z} + \mathbf{y} \times \mathbf{z}$ ($\times$ distribuye sobre $+$).
4. $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3)\ (\forall \lambda \in \mathbb{R})\ (\lambda \mathbf{x}) \times \mathbf{y} = \mathbf{x} \times (\lambda \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x} \times \mathbf{y})$.
5. $(\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3)\ \mathbf{x} \times \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
6. $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{z} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle \mathbf{y} - \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle \mathbf{x}$.
7. $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3)\ \mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) + \mathbf{y} \times (\mathbf{z} \times \mathbf{x}) + \mathbf{z} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = \mathbf{0}$.
   Identidad de Jacobi.

Producto cruz en $\mathbb{R}^3$: Propiedades

Propiedades

1. $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3)\ \mathbf{x} \times \mathbf{y} \perp \mathbf{x} \wedge \mathbf{x} \times \mathbf{y} \perp \mathbf{y}$.
2. $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3)\ \mathbf{x} \times \mathbf{y} = -\mathbf{y} \times \mathbf{x}$ ($\times$ es *anti–conmutativo*).
3. $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3)\ \mathbf{x} \times (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \times \mathbf{y} + \mathbf{x} \times \mathbf{z} \wedge (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \times \mathbf{z} = \mathbf{x} \times \mathbf{z} + \mathbf{y} \times \mathbf{z}$ ($\times$ distribuye sobre $+$).
4. $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3)\ (\forall \lambda \in \mathbb{R})\ (\lambda \mathbf{x}) \times \mathbf{y} = \mathbf{x} \times (\lambda \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x} \times \mathbf{y})$.
5. $(\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3)\ \mathbf{x} \times \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
6. $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{z} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle \mathbf{y} - \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle \mathbf{x}$.
7. $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3)\ \mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) + \mathbf{y} \times (\mathbf{z} \times \mathbf{x}) + \mathbf{z} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = \mathbf{0}$. Identidad de Jacobi.

Producto cruz en $\mathbb{R}^3$: Propiedades

Propiedades

1. $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3)\ \mathbf{x} \times \mathbf{y} \perp \mathbf{x} \wedge \mathbf{x} \times \mathbf{y} \perp \mathbf{y}$.
2. $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3)\ \mathbf{x} \times \mathbf{y} = -\mathbf{y} \times \mathbf{x}$ ($\times$ es *anti–conmutativo*).
3. $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3)\ \mathbf{x} \times (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \times \mathbf{y} + \mathbf{x} \times \mathbf{z} \wedge (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \times \mathbf{z} = \mathbf{x} \times \mathbf{z} + \mathbf{y} \times \mathbf{z}$ ($\times$ distribuye sobre $+$).
4. $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3)\ (\forall \lambda \in \mathbb{R})\ (\lambda \mathbf{x}) \times \mathbf{y} = \mathbf{x} \times (\lambda \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x} \times \mathbf{y})$.
5. $(\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3)\ \mathbf{x} \times \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
6. $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{z} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle \mathbf{y} - \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle \mathbf{x}$.
7. $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3)\ \mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) + \mathbf{y} \times (\mathbf{z} \times \mathbf{x}) + \mathbf{z} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = \mathbf{0}$. Identidad de Jacobi.

Producto cruz en $\mathbb{R}^3$: Propiedades

Propiedades

1. $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3)$ $\mathbf{x} \times \mathbf{y} \perp \mathbf{x} \wedge \mathbf{x} \times \mathbf{y} \perp \mathbf{y}$.
2. $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3)$ $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = -\mathbf{y} \times \mathbf{x}$ ($\times$ es *anti–conmutativo*).
3. $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3)$ $\mathbf{x} \times (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \times \mathbf{y} + \mathbf{x} \times \mathbf{z} \wedge (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \times \mathbf{z} = \mathbf{x} \times \mathbf{z} + \mathbf{y} \times \mathbf{z}$ ($\times$ distribuye sobre $+$).
4. $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3)$ $(\forall \lambda \in \mathbb{R})$ $(\lambda \mathbf{x}) \times \mathbf{y} = \mathbf{x} \times (\lambda \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x} \times \mathbf{y})$.
5. $(\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3)$ $\mathbf{x} \times \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
6. $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{z} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle \mathbf{y} - \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle \mathbf{x}$.
7. $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3)$ $\mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) + \mathbf{y} \times (\mathbf{z} \times \mathbf{x}) + \mathbf{z} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = \mathbf{0}$. Identidad de Jacobi.

Producto cruz en $\mathbb{R}^3$: Propiedades

Propiedades

1. $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3)\ \mathbf{x} \times \mathbf{y} \perp \mathbf{x} \ \wedge \ \mathbf{x} \times \mathbf{y} \perp \mathbf{y}$.
2. $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3)\ \mathbf{x} \times \mathbf{y} = -\mathbf{y} \times \mathbf{x}$ ($\times$ es *anti–conmutativo*).
3. $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3)\ \mathbf{x} \times (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \times \mathbf{y} + \mathbf{x} \times \mathbf{z} \ \wedge \ (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \times \mathbf{z} = \mathbf{x} \times \mathbf{z} + \mathbf{y} \times \mathbf{z}$ ($\times$ distribuye sobre $+$).
4. $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3)\ (\forall \lambda \in \mathbb{R})\ (\lambda \mathbf{x}) \times \mathbf{y} = \mathbf{x} \times (\lambda \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x} \times \mathbf{y})$.
5. $(\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3)\ \mathbf{x} \times \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
6. $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{z} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle \mathbf{y} - \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle \mathbf{x}$.
7. $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3)\ \mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) + \mathbf{y} \times (\mathbf{z} \times \mathbf{x}) + \mathbf{z} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = \mathbf{0}$.
   Identidad de Jacobi.

Producto cruz en $\mathbb{R}^3$: Propiedades

Proposición

$$\left(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}\right) \; \|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\| \, |\operatorname{sen} \theta| \, ,$$

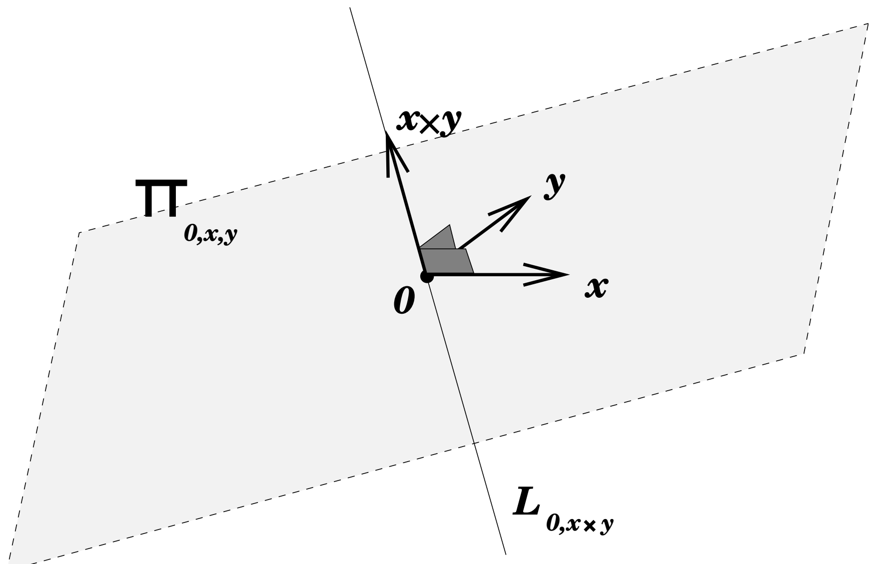
donde θ es el ángulo entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

Producto cruz en $\mathbb{R}^3$: Propiedades geométricas

Proposición

Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ vectores no paralelos, y sea $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$. Entonces

1. $\mathbf{z} \perp \mathbf{x} \ \wedge \ \mathbf{z} \perp \mathbf{y} \implies (\exists \lambda \in \mathbb{R})\ \mathbf{z} = \lambda \mathbf{x} \times \mathbf{y}$.
2. $\mathbf{z} \perp \mathbf{x} \times \mathbf{y} \implies (\exists s, t \in \mathbb{R})\ \mathbf{z} = s\mathbf{x} + t\mathbf{y}$.

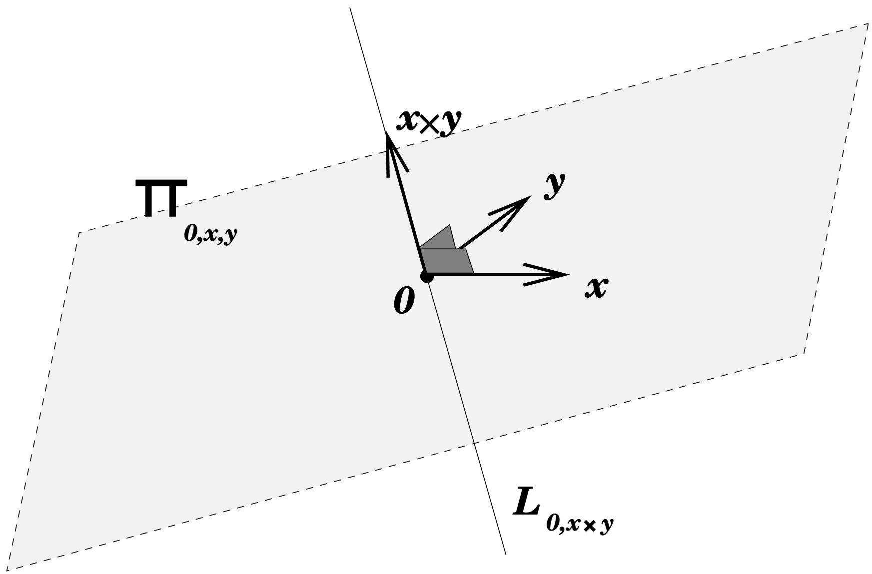


Producto cruz en $\mathbb{R}^3$: Propiedades geométricas

Proposición

Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ vectores no paralelos, y sea $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$. Entonces

1. $\mathbf{z} \perp \mathbf{x} \ \wedge \ \mathbf{z} \perp \mathbf{y} \implies (\exists \lambda \in \mathbb{R})\ \mathbf{z} = \lambda \mathbf{x} \times \mathbf{y}$.
2. $\mathbf{z} \perp \mathbf{x} \times \mathbf{y} \implies (\exists s, t \in \mathbb{R})\ \mathbf{z} = s\mathbf{x} + t\mathbf{y}$.

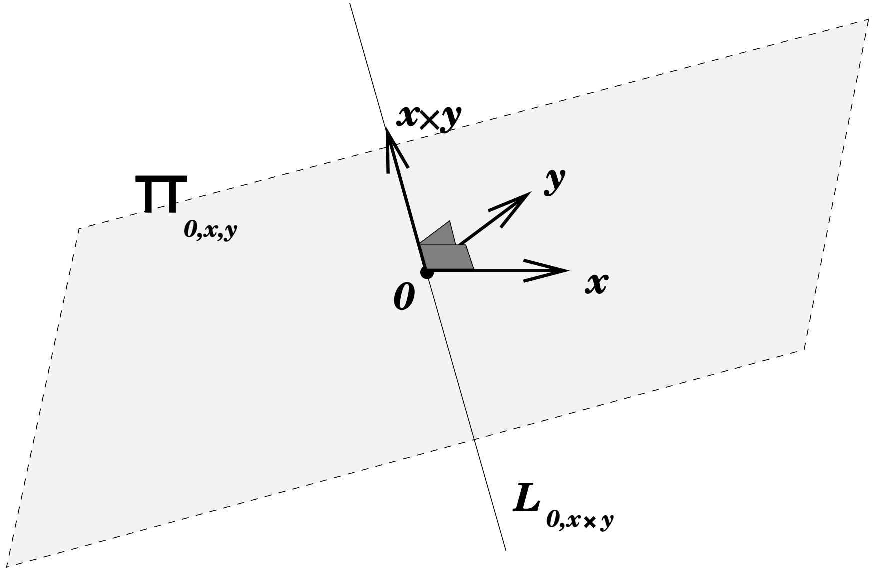


Producto cruz en $\mathbb{R}^3$: Propiedades geométricas

Proposición

Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ vectores no paralelos, y sea $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$. Entonces

1. $\mathbf{z} \perp \mathbf{x} \ \wedge \ \mathbf{z} \perp \mathbf{y} \implies (\exists \lambda \in \mathbb{R})\ \mathbf{z} = \lambda \mathbf{x} \times \mathbf{y}$.
2. $\mathbf{z} \perp \mathbf{x} \times \mathbf{y} \implies (\exists s, t \in \mathbb{R})\ \mathbf{z} = s\mathbf{x} + t\mathbf{y}$.

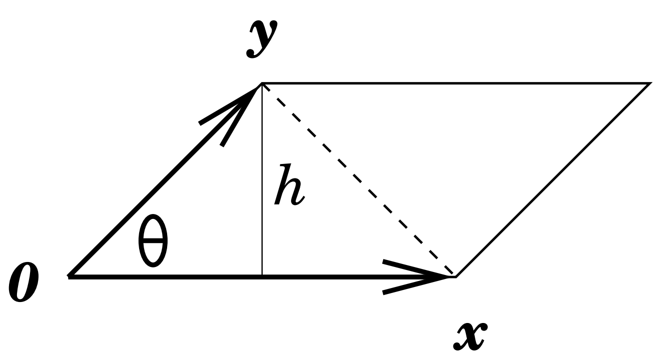


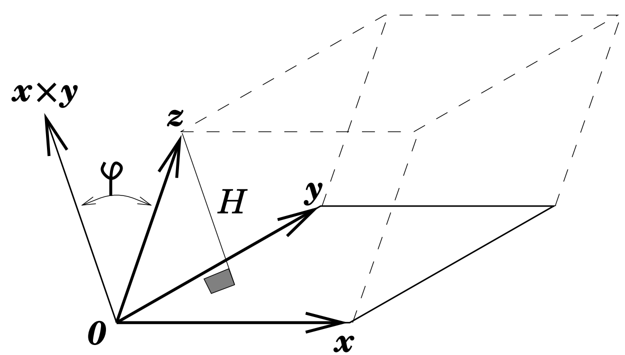
Producto cruz en $\mathbb{R}^3$: Propiedades geométricas

Propiedades

1. Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ vectores no paralelos. Entonces el área del paralelógramo que definen es $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|$.

2. Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ vectores no coplanares con $\mathbf{0}$. Entonces el volumen del paralelepípedo que definen es $|\langle \mathbf{x} \times \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle|$.



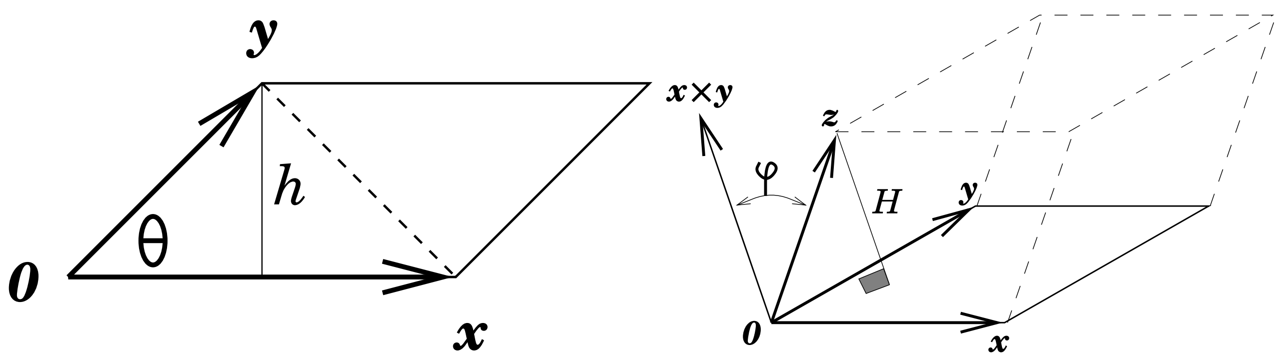


Producto cruz en $\mathbb{R}^3$: Propiedades geométricas

Propiedades

1. Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ vectores no paralelos. Entonces el área del paralelógramo que definen es $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|$.

2. Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ vectores no coplanares con $\mathbf{0}$. Entonces el volumen del paralelepípedo que definen es $|\langle \mathbf{x} \times \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle|$.

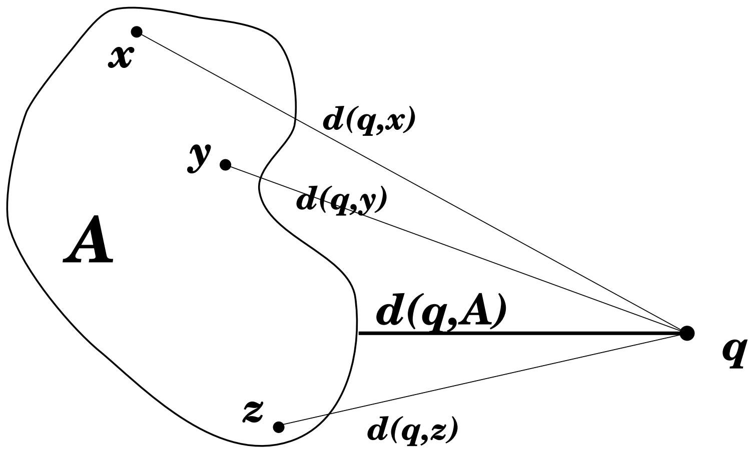


Distancia entre un punto y un conjunto

Distancia punto–conjunto

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ *no vacío* y $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ un punto.

$$\mathrm{d}(\mathbf{q}, A) = \inf \{\mathrm{d}(\mathbf{q}, \mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in A\} .$$

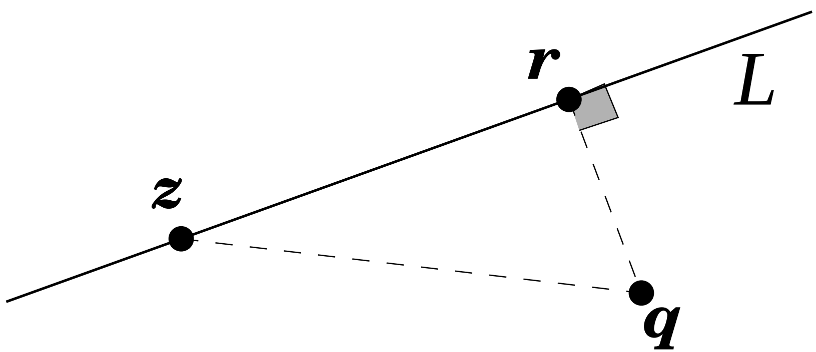


Caso $A = L$

Supongamos $A = L_{\mathbf{p},\mathbf{x}}$.

Si existe $\mathbf{r} \in L$ tal que $\mathbf{q} - \mathbf{r} \perp L$,

$$(\forall \mathbf{z} \in L)\ \mathbf{z} \neq \mathbf{r} \Rightarrow \|\mathbf{q} - \mathbf{z}\| > \|\mathbf{q} - \mathbf{r}\|,$$



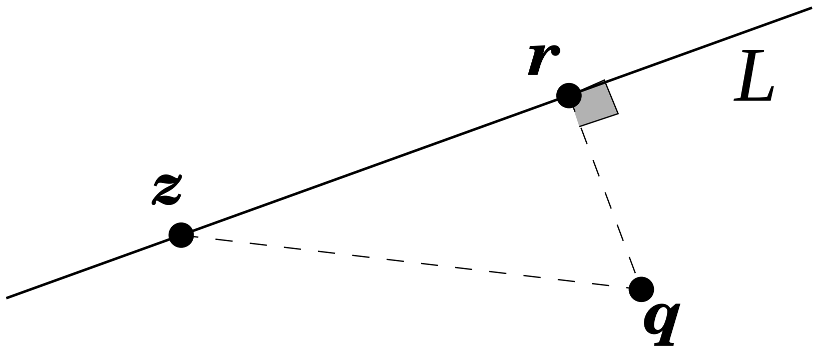
Es decir, $\mathbf{r}$ es tal que $\mathrm{d}(\mathbf{q}, \mathbf{r}) = \mathrm{d}(\mathbf{q}, L)$.

Caso $A = L$

Supongamos $A = L_{\mathbf{p},\mathbf{x}}$.

Si existe $\mathbf{r} \in L$ tal que $\mathbf{q} - \mathbf{r} \perp L$,

$$(\forall \mathbf{z} \in L)\ \mathbf{z} \neq \mathbf{r} \Rightarrow \|\mathbf{q} - \mathbf{z}\| > \|\mathbf{q} - \mathbf{r}\|,$$



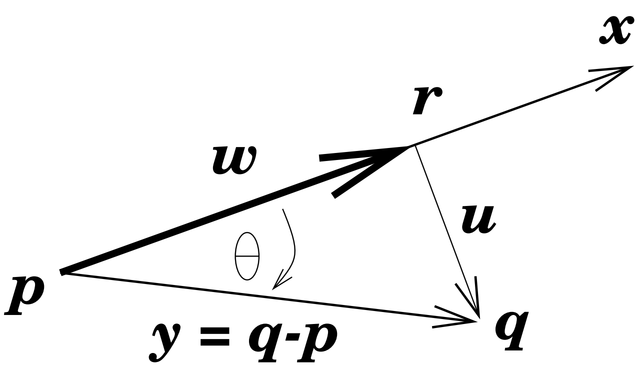
Es decir, $\mathbf{r}$ es tal que $\mathrm{d}(\mathbf{q}, \mathbf{r}) = \mathrm{d}(\mathbf{q}, L)$.

Caso $A = L$

Sea $\widehat{\mathbf{x}} = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\mathbf{x}$ y $\mathbf{y} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$.

$$\mathbf{r} = p + \langle \mathbf{y}, \widehat{\mathbf{x}} \rangle \widehat{\mathbf{x}}.$$

Proyección ortogonal de q sobre L.

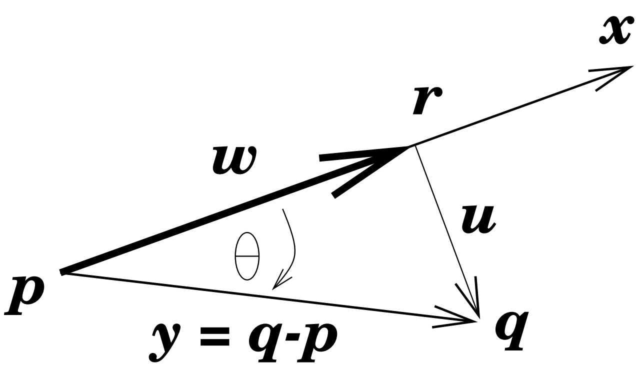


Caso $A = L$

Sea $\widehat{\mathbf{x}} = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\mathbf{x}$ y $\mathbf{y} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$.

$$\mathbf{r} = p + \langle \mathbf{y}, \widehat{\mathbf{x}} \rangle \widehat{\mathbf{x}}.$$

Proyección ortogonal de $\mathbf{q}$ sobre L.



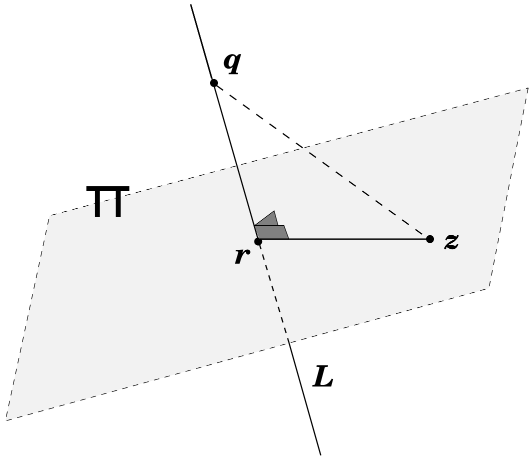
Caso $A = \Pi$

Sea $A = \Pi_{\mathbf{p},\mathbf{d}_1,\mathbf{d}_2}$. El razonamiento es idéntico al anterior.

Sea $\mathbf{n}$ algún vector normal a $\Pi_{\mathbf{p},\mathbf{d}_1,\mathbf{d}_2}$. Por ejemplo $\mathbf{n} = \mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2$.

$$\mathbf{r} = \mathbf{v} = \mathbf{q} + \frac{\langle \mathbf{p} - \mathbf{q}, \mathbf{n} \rangle}{\|\mathbf{n}\|^2}\mathbf{n}$$

Proyección ortogonal de $\mathbf{q}$ sobre Π.



Nuevamente, $\mathbf{r}$ es tal que $\mathrm{d}(\mathbf{q}, \mathbf{r}) = \mathrm{d}(\mathbf{q}, \Pi)$.

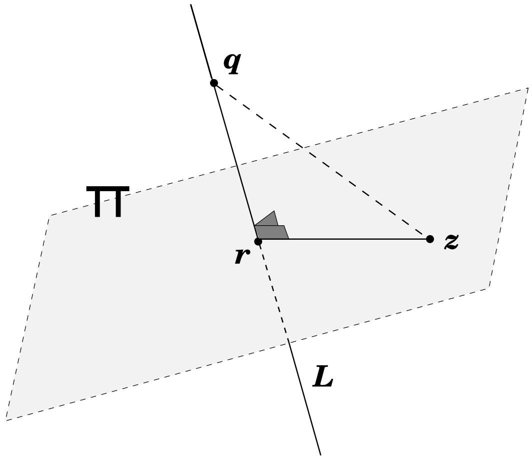
Caso $A = \Pi$

Sea $A = \Pi_{\mathbf{p},\mathbf{d}_1,\mathbf{d}_2}$. El razonamiento es idéntico al anterior.

Sea $\mathbf{n}$ algún vector normal a $\Pi_{\mathbf{p},\mathbf{d}_1,\mathbf{d}_2}$. Por ejemplo $\mathbf{n} = \mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2$.

$$\mathbf{r} = \mathbf{v} = \mathbf{q} + \frac{\langle \mathbf{p} - \mathbf{q}, \mathbf{n} \rangle}{\|\mathbf{n}\|^2}\mathbf{n}$$

Proyección ortogonal de $\mathbf{q}$ sobre Π.



Nuevamente, $\mathbf{r}$ es tal que $\mathrm{d}(\mathbf{q}, \mathbf{r}) = \mathrm{d}(\mathbf{q}, \Pi)$.

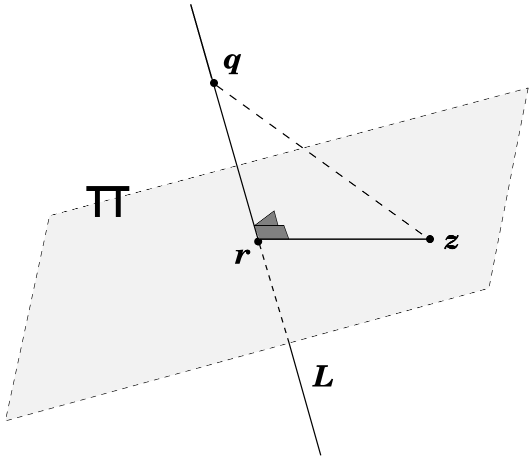
Caso $A = \Pi$

Sea $A = \Pi_{\mathbf{p},\mathbf{d}_1,\mathbf{d}_2}$. El razonamiento es idéntico al anterior.

Sea $\mathbf{n}$ algún vector normal a $\Pi_{\mathbf{p},\mathbf{d}_1,\mathbf{d}_2}$. Por ejemplo $\mathbf{n} = \mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2$.

$$\mathbf{r} = \mathbf{v} = \mathbf{q} + \frac{\langle \mathbf{p} - \mathbf{q}, \mathbf{n} \rangle}{\|\mathbf{n}\|^2}\mathbf{n}$$

Proyección ortogonal de $\mathbf{q}$ sobre Π.



Nuevamente, $\mathbf{r}$ es tal que $\mathrm{d}(\mathbf{q}, \mathbf{r}) = \mathrm{d}(\mathbf{q}, \Pi)$.