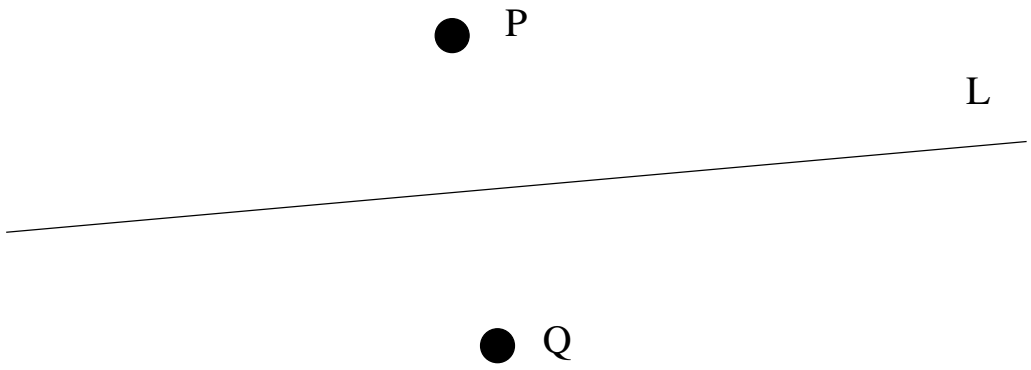
Paralelismo y perpendicularidad

Para estudiar formalmente estas intuitivas nociones geométricas, necesitamos definir primero:

Simetral

Dados dos puntos $P, Q \in \mathbb{R}^2$ distintos, llamamos Simetral de P y Q, a la recta $L \subseteq \mathbb{R}^2$ que satisface

$$(x, y) \in L \Leftrightarrow d(P, (x, y)) = d(Q, (x, y)).$$



En la figura, L es simetral de P y Q.

Paralelismo y perpendicularidad

Definimos ahora las nociones de paralelismo y perpendicularidad:

Paralelismo

Dos rectas L y L' son paralelas (denotado $L||L'$) si $L = L'$ o bien $L \cap L' = \emptyset$.

Lo que dice la definición es que dos rectas que no sean la misma son paralelas si no hay puntos comunes a ambas. O visto de otra forma, dadas las ecuaciones de ambas rectas

$$L: \ ax + by + c = 0, \quad \text{y} \quad L': \ dx + ey + f = 0,$$

con $L \neq L'$, $L||L'$ es equivalente a que el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} ax + by &= -c \\ dx + ey &= -f \end{aligned}$$

no tenga solución en $x, \ y$. Lo cual, si recordamos algunas cosas del colegio, sucede cuando $ae = bd$. O equivalentemente, para rectas no verticales, cuando $-\frac{d}{e} = -\frac{a}{b}$. Lo que corresponde a que sus pendientes sean iguales.

Paralelismo y perpendicularidad

O sea, tenemos la siguiente propiedad:

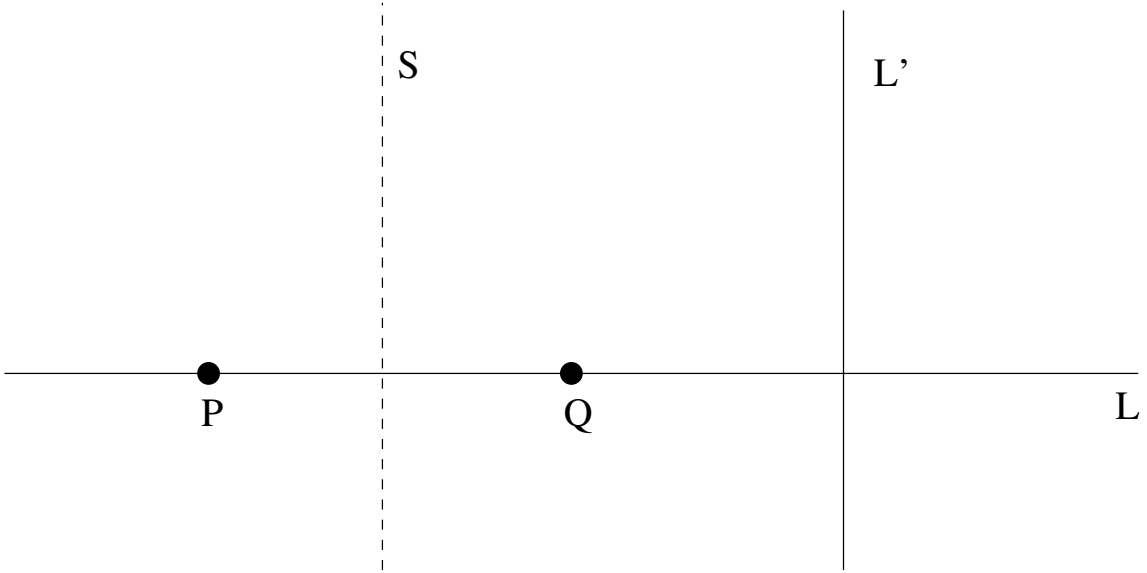
Propiedad

Dos rectas no verticales L y L' son paralelas si y sólo si $m_L = m_{L'}$.

Ahora definimos la perpendicularidad:

Perpendicularidad

Dos rectas L y L' son perpendiculares u ortogonales (denotado $L \perp L'$), si para todo par de puntos $P, Q \in L$, $P \neq Q$, la simetral entre P y Q es paralela a L'.



En la Figura, S es la simetral de los puntos P y Q.

Paralelismo y perpendicularidad

Veremos una forma más directa de verificar que dos rectas son perpendiculares:

Teorema

Sean L y L'dos rectas. Entonces $L \perp L'$ si y sólo si una de las siguientes afirmaciones se satisface.

- L es horizontal y L' es vertical (o *vice versa*).
- L y L' son oblicuas y $m_L \cdot m_{L'} = -1$.

Demostración.

Veamos casos

- En el primer caso, si L es horizontal y L' es vertical, dos puntos de L tienen asociada una simetral vertical y usando la propiedad anterior se tiene que es paralela a L'.
  En el caso en que los roles están cambiados, es análogo.

- En el segundo caso, sabemos que dados dos puntos $P = (\alpha, \beta)$ y $Q = (\gamma, \delta)$, con $\alpha \neq \beta$ y $\gamma \neq \delta$, la simetral (llamémosla S) es oblicua con pendiente $m_S = \frac{\alpha-\gamma}{\delta-\beta}$ (verificar esto como ejercicio).
  Como la pendiente de la recta L es $m_L = \frac{\beta-\delta}{\alpha-\gamma}$ luego $m_S = -\frac{1}{m_L}$ y por ende:

$$\begin{aligned} L \perp L' &\Leftrightarrow L' || S \\ &\Leftrightarrow m_{L'} = m_S \\ &\Leftrightarrow m_{L'} = -\frac{1}{m_L} \\ &\Leftrightarrow m_{L'} \cdot m_L = -1. \end{aligned}$$

$\square$