

Dinámica de autómatas

June 9, 2010

Autómatas celulares

Definiciones básicas

Definición 1 Definimos un autómata celular de la forma $A = (N, \{V_n\}_{n \in N}, \{Q_n\}_{n \in N}, \{f_n\}_{n \in N})$ en que:

1. N es un conjunto de nodos
2. Los V_n son subconjuntos finitos de N , llamados vecinos de n
3. Los Q_n son conjuntos finitos, llamados estados
4. Los f_n son funciones, $f_n : \prod_{m \in V_n} Q_m \rightarrow Q_n$, llamadas funciones locales.

Es claro que se puede extender cada f_n naturalmente, de tal forma que su dominio sea $\prod_{n \in N} Q_n$ (en que importe únicamente lo que ocurre en $\prod_{m \in V_n} Q_m$). Notaremos las funciones extendidas como \tilde{f}_n

Definición 2 Una función $F : \prod_{n \in N} Q_n \rightarrow \prod_{n \in N} Q_n$ es inducida por un autómata celular ssi

$$F_i(x) = \tilde{f}_i(x) \quad \forall i \in N$$

Definición 3 Entenderemos por configuración de estados a una colección $\{i_n\}_{n \in N}$ en que cada $i_n \in Q_n$

Notemos que una función F inducida por un autómata celular actúa sobre una configuración de estados de forma que, para cada nodo, cambia su estado de acuerdo a la configuración de sus vecinos.

En general, nos interesará el caso en que N es un grupo (digamos, con $+$). Recordemos que en un grupo, dado un conjunto V , podemos definir $V + n := \{a + n, a \in V\}$

Definición 4 Un autómata celular se dice homogéneo ssi:

1. Existe un V , tal que $V_n = V + n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$
2. Existe un conjunto Q , tal que $Q_n = Q \quad \forall n \in \mathbb{Z}$
3. Existe $f : Q^{\mathbb{Z}} \rightarrow Q$, tal que $f_n = f \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

En general, nos referiremos al par (N, F) como el autómata celular (en que F es la función inducida por él)

Definiciones básicas para $N = \mathbb{Z}$

En general nos interesará el caso homogéneo, por lo que, podemos hablar de el conjunto V :

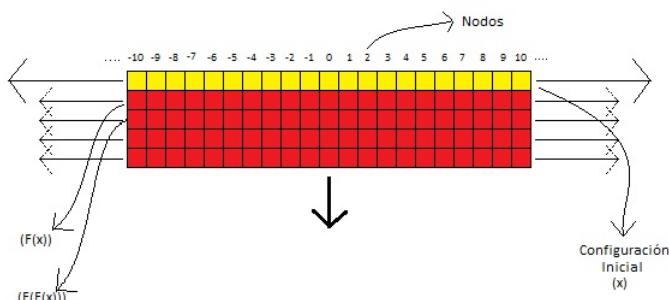
Observación 1 En este caso, como V es un conjunto finito, podemos obtener

$$a = \max_{v \in V \cup \{0\}} \{v\} \quad y \quad -m = \min_{v \in V \cup \{0\}} \{v\}$$

Luego, podemos redefinir el conjunto de vecinos como $V_n = [m + n, a + n]$. Llamaremos a los valores a y m , anticipación y memoria (respectivamente)

Definición 5 Definimos $r := \max\{|a|, |m|\}$ como el **Radio de la regla local**

En lo sucesivo, consideraremos los siguientes diagramas que nos permitirán comprender mejor las situaciones y demostraciones:



Esto es, en la primera fila se anota el estado inicial de cada nodo, y en las filas sucesivas se anotan los estados obtenidos al iterar F sobre la configuración de estados

En adelante, asumiremos que el conjunto de estados es Q .

Nos interesa darle una estructura al conjunto de configuraciones de estado, luego, es necesario comenzar dándole una estructura a Q . Como tal conjunto es finito, lo dotamos de la topología de las partes.

Notemos que como Q es finito, es compacto

Recordemos un resultado importante de análisis:

Teorema 1 (Tychonoff) Si A_i son conjuntos compactos, con $i \in I$, entonces $\prod_{i \in I} A_i$ es compacto

Notemos que el conjunto de las configuraciones de estados coincide con $Q^{\mathbb{Z}}$. Dotando a este conjunto de la topología de los cilindros (que es la topología natural), podemos utilizar el teorema anterior para concluir:

Observacion 2 $Q^{\mathbb{Z}}$ es compacto, utilizando la topología de los cilindros

Notación 1 Recordemos que para un elemento x en $Q^{\mathbb{Z}}$, podemos referirnos al valor en su coordenada i como x_i , y que podemos hablar del cilindro $[a_1, \dots, a_s]_k$ que es el conjunto de los x que entre las coordenadas k y $k + s$, su valor es a_1, \dots, a_s

Dado que es muy difícil trabajar en un espacio topológico, nos interesa dotar al conjunto de una métrica:

Definicion 6 Se define la métrica d para $Q^{\mathbb{Z}}$, $d : Q^{\mathbb{Z}} \times Q^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}$ como $d(x, y) = 2^{-n(x,y)}$ con

$$n(x, y) = \inf\{|i| : i \in \mathbb{Z}, y_i \neq x_i\}$$

Proposicion 1 Sea $0 < \epsilon < 1$, entonces si consideramos $N = \lceil -\log_2(\epsilon) \rceil - 1$, se tendrá que, dado $x \in Q^{\mathbb{Z}}$, entonces:

$$y \in B_\epsilon(x) \Leftrightarrow y \in [x_{-N}, x_{-N+1}, \dots, x_{N-1}, x_N]_{-N}$$

Esto nos indica que x se parece a y ssi son iguales en una gran cantidad de coordenadas centrales

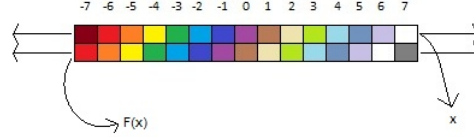
Proposicion 2 La topología heredada de esta métrica es la de los cilindros

La demostración es sencilla, pero no la incluiremos.

Terminamos esta sección definiendo una función con la que trabajaremos bastante:

Definicion 7 Se define la función shift, $\sigma : Q^{\mathbb{Z}} \rightarrow Q^{\mathbb{Z}}$, de tal forma que $\sigma(x)_i = x_{i+1}$

En general, se pueden definir los shift en otros conjuntos, como las traslaciones en una unidad en alguna dirección (por ejemplo, se pueden definir en \mathbb{N} o en \mathbb{Z}^n). Adjuntamos el diagrama de la función σ



Primeros resultados para $N = \mathbb{Z}$

Teorema 2 $(Q^{\mathbb{Z}}, F)$ es un autómata celular homogéneo ssi F es continua para la topología de los cilindros y se cumple que $F \circ \sigma = \sigma \circ F$

Demostración:

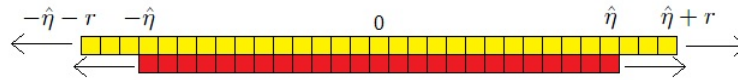
Supongamos que F es un autómata celular homogéneo, veamos que:

1. F es continua: Sea $\epsilon > 0$. Podemos asumir $\epsilon < 1$. ($\epsilon \geq 1$ es trivial, pues la distancia máxima en $Q^{\mathbb{Z}}$ es 1).

Sea $\hat{\eta} = \lceil -\log_2(\epsilon) \rceil$. Es claro que se cumple $2^{-\hat{\eta}} \leq \epsilon$. Tomemos $\delta = 2^{-\hat{\eta}-r-1}$ (en que r es el radio de la regla local de F), luego, si $d(x, y) \leq \delta$ (con x e y en $Q^{\mathbb{Z}}$), se cumplirá que $\hat{\eta} + r + 1 \leq n(x, y)$, es decir:

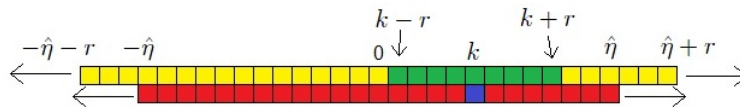
$$\forall i \in \mathbb{Z}, -\hat{\eta} - r \leq i \leq \hat{\eta} + r \Rightarrow x_i = y_i$$

(En esta primera parte hemos traducido la noción de que estar cerca según la métrica d significa ser iguales entre las coordenadas $-m$ y m para algún m)



Sea ahora k con $|k| \leq \hat{\eta}$ (notemos que caemos dentro del conjunto de los i anteriores). Para todo $j \in \mathbb{Z}$ con $k - r \leq j \leq k + r$, se tendrá que $-\hat{\eta} - r \leq k - r \leq j \leq k + r \leq \hat{\eta} + r$, luego, $x_j = y_j$.

De esta forma, si j es vecino de k , entonces $x_j = x_k$, de donde $F_k(x) = F_k(y)$.



Notemos que esto se cumple $\forall k, |k| \leq \hat{\eta}$, y entonces $\hat{\eta} \leq n(F(x), F(y))$

De esto último se deduce que $d(F(x), F(x)) \leq 2^{-\hat{\eta}} \leq \epsilon$ y se concluye la continuidad

2. F es shift-invariante: Notemos que, por definición:

$$\begin{aligned} F(\sigma(x))_j &= f((\sigma(x))_{(j-m)}, \sigma(x)_{(j-m+1)}, \dots, \sigma(x)_{(j+a-1)}, \sigma(x)_{(j+a)}) \\ &= f((x_{(j+1-m)}, x_{(j+1-m+1)}, \dots, x_{(j+1+a-1)}, x_{(j+1+a)})) \\ &= F(x)_{(j+1)} \end{aligned}$$

Esto, ya que la regla local de F es f en cada coordenada por ser F homogéneo

Supongamos ahora que F es continuo y shift-invariante:

Sea $q \in Q$, tomemos el cilindro cuya coordenada en 0 es q : $[q]_0$. Encontramos $F^{-1}([q]_0)$:

Como $[q]_0$ es abierto y cerrado, y F es continua, se tiene que $F^{-1}([q]_0)$ es abierto y cerrado. Tomemos para cada punto x en $F^{-1}([q]_0)$ una bola B , tal que $x \in B$ y tal que $B \subseteq F^{-1}([q]_0)$ (tal bola existe, pues el conjunto es abierto).

Como $F^{-1}([q]_0)$ es un cerrado en un espacio compacto, se tiene que $F^{-1}([q]_0)$ es un compacto. El recubrimiento anterior es un recubrimiento de abiertos de $F^{-1}([q]_0)$, luego, podemos tomar un subrecubrimiento finito (indexémoslo con el conjunto I). Ya que cada bola B_i es subconjunto de $F^{-1}([q]_0)$, se tendrá:

$$\bigcup_{i \in I} B_i \subseteq F^{-1}([q]_0) \subseteq \bigcup_{i \in I} B_i$$

Luego, necesariamente $\bigcup_{i \in I} B_i = F^{-1}([q]_0)$

Por otro lado, cada bola es un cilindro, luego, $F^{-1}([q]_0)$ es unión finita de cilindros.

Tomemos para cada q el conjunto finito de cilindros tomado como antes, Γ_q . Tomamos ahora, el conjunto $\Gamma := \bigcup_{q \in Q} \Gamma_q$ que es la colección de todos los cilindros encontrados para algún q .

Para cada cilindro C en Γ , tomamos su mayor y menor coordenada fija, a_C y $-m_C$ respectivamente. Por último, tomamos $a = \max_{C \in \Gamma} \{a_C\}$ y $-m = \min_{C \in \Gamma} \{-m_C\}$.

Tomamos entonces el conjunto V de los vecinos del nodo 0 como $V := [-m, a]$, pues $F^{-1}([q]_0)$ es unión de cilindros con coordenadas fijas entre $-m$ y a

Así, hemos encontrado la función local $f_0 : Q^{a+m+1} \rightarrow Q$. El mismo procedimiento se puede aplicar para encontrar f_i para cualquier i , con lo que concluimos que F es un autómata celular.

Falta ver que F es homogéneo. Para ello, notemos que el conjunto de estados es el mismo para cada

coordenada. Como F es shift invariante, tenemos que

$$f_{i+1}(x_{-m_{i+1}}, \dots, x_{a_{i+1}}) = F(x)_{i+1} = \sigma(F(x))_i = F(\sigma(x))_i = f_i(x_{-m_{i+1}}, \dots, x_{a_{i+1}})$$

Y de esto, podemos obtener (quizás con algo más de esfuerzo) que el conjunto de vecinos V_n de cada coordenada es igual a $V_0 + n$, y que $f_i \equiv f_0$, lo que nos permite concluir que F es homogéneo. ■

¿Qué tipos de estructura podemos darle a $Q^{\mathbb{Z}}$? En el caso Q finito, sabemos que todo abierto es un cerrado, luego, la topología tienen estructura de σ -álgebra. Gracias a esto, podemos definir:

Definición 8 Se define $M(Q^{\mathbb{Z}}) = \{u : \mathbb{B}(Q^{\mathbb{Z}}) \rightarrow [0, 1], u \text{ es medida de probabilidad} \}$

Definición 9 Se define la aplicación lineal $l_F : M(Q^{\mathbb{Z}}) \rightarrow M(Q^{\mathbb{Z}})$, de tal forma que $l_F(u) = u \circ F_{-1}$

No es difícil probar que si μ es medida, entonces $l_F(\mu)$ es medida, luego, la aplicación está bien definida.

Proposición 3 Como $Q^{\mathbb{Z}}$ es espacio métrico compacto, se puede dotar a $M(Q^{\mathbb{Z}})$ de la topología vaga, luego, es espacio métrico compacto y convexo.

Teorema 3 Para todo autómata celular existe una medida invariante respecto a l_F

Demostración:

A partir de la medida μ , construimos la sucesión de medidas $\mu^{(n)}$, con $\mu^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} l_F^{(k)}(\mu)$.

Como el espacio es compacto, podemos tomar una subsucesión convergente, y nos preguntamos si el límite de tal sucesión es invariante para l_F :

Notemos que:

$$l_F(\mu^{(n)}) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} l_F^{(k+1)}(\mu) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n l_F^{(k)}(\mu) = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} l_F^{(k)}(\mu) + l_F^{(n)}(\mu) - \mu \right) = \mu^{(n)} + \frac{l_F^{(n)}(\mu) - \mu}{n}$$

Sea f continua sobre $Q^{\mathbb{Z}}$ a valores reales, entonces $\int_{Q^{\mathbb{Z}}} f d(l_F(\mu^{(n)})) = \int_{Q^{\mathbb{Z}}} f d\mu^{(n)} + \int_{Q^{\mathbb{Z}}} \frac{f}{n} d(l_F^{(n)}(\mu) - \mu)$.

Dado que $Q^{\mathbb{Z}}$ es compacto, se tiene que f es acotada, luego, $\left| \int_{Q^{\mathbb{Z}}} \frac{f}{n} d(l_F^{(n)}(\mu) - \mu) \right| \leq \frac{\max_{x \in Q^{\mathbb{Z}}} f(x)}{n} \rightarrow 0$.

De esta forma, si llamamos ν al límite de la subsucesión, $\mu^{(n)} \rightarrow \nu$ en la topología vaga, se tiene que $l_F(\mu^{(n)})$ tiende a ν .

Por último, sea f continua. Como F es continua, $f \circ F$ es continua, y se tiene;

$$\int_{Q^{\mathbb{Z}}} f dl_F(\mu^{(n)}) = \int_{Q^{\mathbb{Z}}} f \circ F d\mu^{(n)} \rightarrow \int_{Q^{\mathbb{Z}}} f \circ F d\nu = \int_{Q^{\mathbb{Z}}} f dl_F(\nu) \text{ con lo que } l_F(\mu^{(n)}) \rightarrow l_F(\nu).$$

Se concluye que $l_F(\nu) = \nu$

■

Utilizaremos la estructura de espacio medible para obtener una propiedad fundamental de F :

Definición 10 Se define la medida producto uniforme independiente como $\mu([a_0, \dots, a_{l-1}]_k) = \frac{1}{|Q|^l}$, es decir, se multiplica $|Q|^{-1}$ tantas veces como coordenadas fijas tenga el cilindro.

Notación 2 Diremos que, dadas dos palabras w y u (de largos $l + 2r$ y l , respectivamente), se tiene

$$f(w) = u \text{ ssi } \forall 1 \leq i \leq l, f(w_{-r+i}, w_{-r+i+1}, \dots, w_{r+i-1}, w_{r+i}) = u_i$$

Teorema 4 Si $F : Q^{\mathbb{Z}} \rightarrow Q^{\mathbb{Z}}$ es autómata celular homogéneo, entonces F es sobreyectiva ssi la medida producto uniforme independiente es invariante para l_F

Demostración:

Sin pérdida de generalidad, supondremos que para F la memoria es $-r$ y la anticipación es r (donde r es el radio de la regla local de F). Por otro lado, recordemos que la topología de $Q^{\mathbb{Z}}$ es a su vez una σ -álgebra.

Notemos que $F^{-1}([a_0, \dots, a_{l-1}]_k)$ es unión disjunta de cilindros de la forma $[q_{-r}, \dots, q_{r+l-1}]_{-r+k}$ (Esto pues, para que la coordenada s tome un cierto valor, sólo son importantes las coordenadas entre $s - r$ y $s + r$). Además, como Q es finito, podemos tomar estos cilindros disjuntos y en una cantidad finita.

Definiremos $S_l(a_0, \dots, a_{l-1}) := \{x \in Q^{l+2r}, f(x) = \{a_0, \dots, a_{l-1}\}\}$. (Esto es, todas las palabras cuya imagen es $\{a_0, \dots, a_{l-1}\}$)

Así, $F^{-1}([a_0, \dots, a_{l-1}]_k) = \bigcup_{w \in S_l(a_0, \dots, a_{l-1})} [w]_{k-r}$, de donde:

$$\mu(F^{-1}([a_0, \dots, a_{l-1}]_k)) = \sum_{w \in S_l(a_0, \dots, a_{l-1})} \frac{1}{|Q|^{l+2r}} = \frac{|S_l(a_0, \dots, a_{l-1})|}{|Q|^{l+2r}}$$

Notando que $\mu([a_0, \dots, a_{l-1}]_k) = \frac{1}{|Q|^l}$ se tendrá que:

$$\begin{aligned} \mu &= l_F(\mu) \\ &\Downarrow \\ \forall k \in \mathbb{Z}, \quad \forall l \in \mathbb{N}, \quad \forall \{a_0, \dots, a_{l-1}\} \in Q^l, \quad |Q|^{2r} &= |S_{k,l}(a_0, \dots, a_{l-1})| \end{aligned}$$

(A la propiedad de abajo la llamaremos $(*)$)

(La implicancia de la forma $\boxed{\Uparrow}$ se tiene pues las medidas serían iguales en los cilindros, que es un álgebra que engendra la σ -álgebra, luego, por Hahn, las medidas son iguales)

Notemos que entonces para probar el teorema, nos bastará con probar $(*) \Leftrightarrow F$ es sobreyectiva:

Probemos que $(*) \Rightarrow F$ es sobreyectiva:

Sea $x \in Q^{\mathbb{Z}}$, tomemos la sucesión de conjuntos $\{\tilde{S}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, en que $\tilde{S}_n := F^{-1}([x_{-n}, x_{-n+1}, \dots, x_{n-1}, x_n]_{-n})$. Recordemos que este conjunto es la unión de los $[w]_{-n-r}$, con w en $S_{2n+1}(x_{-n}, \dots, x_n)$.

Como $|S_{2n+1}(x_{-n}, \dots, x_n)| = |Q|^{2r}$, se tiene que $\tilde{S}_n \neq \emptyset$, y como es unión finita de cilindros, que son cerrados, es un cerrado.

Sea $m > n$. Tomemos $y \in \tilde{S}_m$, sabemos de y que $F(y)_i = x_i, \forall i \in \{-m, \dots, m\}$. En particular, dado que $m > n$, se tiene que $F(y)_i = x_i, \forall i \in \{-n, \dots, n\}$, y entonces, $y \in \tilde{S}_n$. Hemos mostrado entonces, que $m > n \Rightarrow \tilde{S}_m \subseteq \tilde{S}_n$.

Por lo anterior, se tiene que $\tilde{S}_n \cap \tilde{S}_m = \tilde{S}_{\max\{n,m\}}$, y, en general, para $J \subseteq \mathbb{N}$ finito se tiene que $\bigcap_{j \in J} \tilde{S}_j = \tilde{S}_{\max\{j \in J\}}$, que es no vacío. Luego, $\{\tilde{S}_n\}$ es una sucesión de cerrados con la propiedad de la intersección finita.

Como $Q^{\mathbb{Z}}$ es espacio métrico (luego separado) y compacto, se tiene que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \tilde{S}_n \neq \emptyset$. Tomemos un y cualquiera en esta intersección, veremos que $F(y) = x$. En efecto, sea $z \in \mathbb{Z}$. Como $y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \tilde{S}_n \subseteq S_{|z|}$, se tiene que $F(y)_z = x_z$, y esto se cumple para todo z , luego, $F(y) = x$.

Así, hemos encontrado un elemento cuya imagen es x , y como x es cualquiera, se concluye que F es sobreyectiva.

Antes de demostrar que F sobreyectiva $\rightarrow (*)$, es necesario dar algunas definiciones:

Definición 11 Se define Q^+ como $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q^n$. Este es el conjunto de todas las palabras posibles con signos en Q

Notación 3 Sea $u \in Q^+$, si u es de largo n , notaremos $f^{-1}(u) := \{w \in Q^{n+2r}, f(w) = u\}$

Sea $p = \min_{u \in Q^+} \{|f^{-1}(u)|\}$. Como F es sobreyectiva, se tiene que, en particular, f es sobreyectiva, luego, cada uno de tales conjuntos es no vacío, con lo que $p > 0$.

Notación 4 Sea $q_1 \in Q^+$ y $q_2 \in Q^+$, notaremos q_1q_2 como la concatenación de caracteres de q_1 con los de q_2

Ahora, para demostrar que F sobreyectiva \rightarrow (*), debemos probar dos lemas:

Lema 1 Sea $u \in Q^+$, si $|f^{-1}(u)| = p$, entonces $|f^{-1}(uq)| = p$ para cualquier $q \in Q$

Demostración:

Es claro que $\bigcup_{b \in Q} \{vb, v \in f^{-1}(u)\} = \bigcup_{q \in Q} f^{-1}(uq)$, y además, estas uniones son disjuntas.

Como $|\{vb, v \in f^{-1}(u)\}| = |f^{-1}(u)| = p$, entonces $|\bigcup_{b \in Q} \{vb, v \in f^{-1}(u)\}| = \sum_{b \in Q} p = |Q|p$. Así, por la igualdad anterior, $p|Q| = \sum_{q \in Q} |f^{-1}(uq)|$.

Por otro lado, $|f^{-1}(uq)| \geq p, \forall q \in Q$, con lo que, si para algún q se tuviese $|f^{-1}(uq)| > p$, por la igualdad anterior, se tendría que $p|Q| > p|Q|$, lo que nos daría una contradicción

□

Notemos que, en general, el lema anterior nos asegura que si $|f^{-1}(u)| = p$, entonces $p = |f^{-1}(u)| = |f^{-1}(us)|$ con s una palabra cualquiera

Lema 2 $p = |Q|^{2r}$

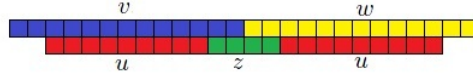
Demostración:

Sea u tal que $|f^{-1}(u)| = p$. Veamos que $\{vw | v, w \in f^{-1}(u)\} = \bigcup_{z \in Q^{2r}} f^{-1}(uzu)$ (notemos desde ya que tal union es disjunta). Esto quiere decir que si $f(w) = u$ y $f(v) = u$, entonces existe una palabra z de largo $2r$, tal que $f(vw) = uzu$ (y viceversa)

En efecto, sean v, w en $f^{-1}(u)$. Si u es el largo de n , entonces el largo de v y w será $n + 2r$, y por lo tanto, vw es de largo $2n + 4r$. La palabra formada entonces, al aplicar f , tendrá largo $2n + 2r$.

Sea i entre 0 y $n - 1$. Se tendrá que $(vw)_{i+j} = v_j$ para todo j entre 0 y $2r$.

Así, $f((vw)_i, \dots, (vw)_{i+2r}) = f(v_i, \dots, v_{i+2r}) = u_i$. Lo mismo ocurre para i entre $n + 2r + 1$ y $2n + 2r$ (aquí, $(vw_{i+j}) = w_j$). Con esto, es fácil ver que $f(vw)$ es de la forma uzu con z una palabra. Como u es de largo n y $f(vw)$ es de largo $2n + 2r$, necesariamente z es de largo $2r$ (es decir, $z \in Q^{2r}$). Así, se tiene que $\{vw \mid v, w \in f^{-1}(u)\} \subseteq \bigcup_{z \in Q^{2r}} f^{-1}(uzu)$



Es igual de sencillo convencerse que un elemento de $\bigcup_{z \in Q^{2r}} f^{-1}(uzu)$, necesariamente está en $\{vw \mid v, w \in f^{-1}(u)\}$.

El resultado lo tendremos al calcular el cardinal tanto de $\{vw \mid v, w \in f^{-1}(u)\}$ como de $\bigcup_{z \in Q^{2r}} f^{-1}(uzu)$

1. Notemos que $\{vw \mid v, w \in f^{-1}(u)\} = \bigcup_{w \in f^{-1}(u)} \{vw \mid v \in f^{-1}(u)\}$ y que esta union es disjunta, luego:

$$\begin{aligned}
 |\{vw \mid v, w \in f^{-1}(u)\}| &= \sum_{w \in f^{-1}(u)} |\{vw \mid v \in f^{-1}(u)\}| \\
 &= \sum_{w \in f^{-1}(u)} |f^{-1}(u)| \\
 &= \sum_{w \in f^{-1}(u)} p \\
 &= |\{w \in f^{-1}(u)\}|p \\
 &= |f^{-1}(u)|p \\
 &= p^2
 \end{aligned}$$

2. Por otro lado, $|\bigcup_{z \in Q^{2r}} f^{-1}(uzu)| = \sum_{z \in Q^{2r}} |f^{-1}(uzu)|$. Del lema anterior, como uzu es una concatenación de la palabra u con la palabra zu , se tiene que $|f^{-1}(uzu)| = |f^{-1}(u)| = p$, con lo que:

$$\sum_{z \in Q^{2r}} |f^{-1}(uzu)| = \sum_{z \in Q^{2r}} |f^{-1}(u)| = \sum_{z \in Q^{2r}} p = |\{z \in Q^{2r}\}|p = |Q|^{2r}p$$

Debido a la igualdad de los conjuntos, se tendrá entonces que $p^2 = |Q|^{2r}p$, y como $p \neq 0$, se tiene que $p = |Q|^{2r}$.

□

Terminamos concluyendo el teorema inicial:

Es claro que $\sum_{q \in Q} |f^{-1}(q)| = |f^{-1}(Q)| = |Q|^{2r+1}$. Como $|Q|^{2r} = p \leq |f^{-1}(q)|$, se tiene que si existe q , tal que $|f^{-1}(q)| > p$, entonces:

$$|Q|^{2r+1} = |Q| |Q|^{2r} = \sum_{q \in Q} |Q|^{2r} < \sum_{q \in Q} |f^{-1}(q)| = |f^{-1}(Q)| = |Q|^{2r+1}$$

Lo cual es una contradicción. Por ende, $|f^{-1}(q)| = |Q|^{2r} = p$ para toda letra q , y del primer lema se deduce que cualquier palabra cumple con que su preimagen tiene cardinal $|Q|^{2r}$. De esto se deduce directamente la propiedad (*). ■

Clasificaciones básicas de Autómatas Celulares

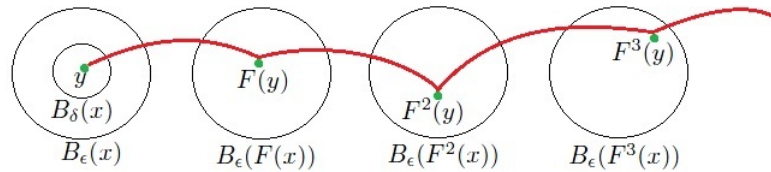
Equicontinuidad

Definición 12 Se dice que $x \in Q^{\mathbb{Z}}$ es equicontinuo ssi

$$\forall \epsilon > 0 \exists \lambda > 0, d(x, y) < \lambda \Rightarrow d(F^n(x), F^n(y)) < \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

En adelante entenderemos que las imágenes sucesivas de x son los puntos $x, F(x), F^2(x), \dots$ etc. Además, si F es biyectivo, entenderemos que las preimágenes sucesivas de x son los puntos $x, F^{-1}(x), F^{-2}(x), \dots$ etc.

Queda claro entonces, que un punto x es equicontinuo ssi para cualquier punto y que esté suficientemente cerca de x , sus imágenes sucesivas están cerca de las imágenes sucesivas de x

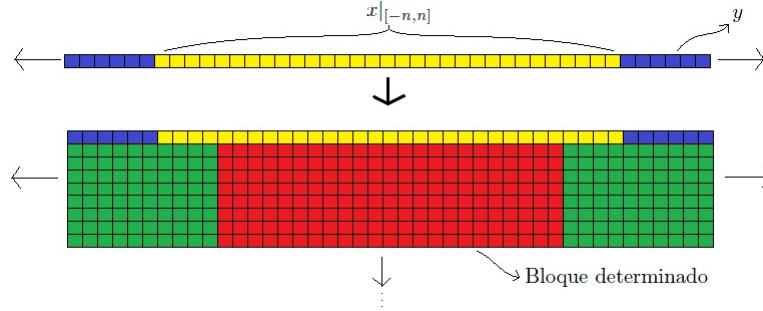


Proposicion 4 x es equicontinuo ssi

$$\forall N > 0 \exists M > 0, x|_{[-M, M]} = y|_{[-M, M]} \rightarrow F^n(x)|_{[-N, N]} = F^n(y)|_{[-N, N]}, \forall n \in \mathbb{Z}$$

La demostración consiste en traducir la noción de estar cerca en la métrica de $Q^{\mathbb{Z}}$. Notemos que esto se traduce básicamente, en que si leemos en las coordenadas centrales las coordenadas de x equicontínuo, entonces tenemos determinado un bloque de alto infinito.

Esto nos induce a definir lo que es una palabra bloqueadora:



Definicion 13 Se dice que w (digamos, de largo $2n + 1$) es una palabra bloqueadora para F ssi existe un $p \leq n$, tal que hay un bloque B de largo infinito y de ancho $2p + 1$ que cumple:

$$\forall x \in [b_{-n} \dots b_n]_{-n}, F^l(x)_j = B_{l, j+p} \quad \forall -p \leq j \leq p, \quad \forall l \in \mathbb{N}$$

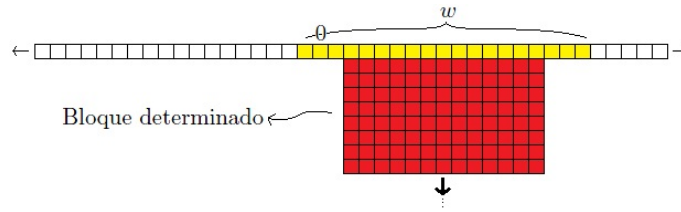
(diremos además que determina al bloque B de ancho $2p + 1$)

Una palabra bloqueadora, es entonces, una palabra que determina un bloque infinito hacia abajo. Es importante notar que las coordenadas centrales de un punto equicontínuo, si forman una palabra lo suficientemente larga, siempre serán bloqueadoras. La siguiente observación indica que, en realidad, podemos encontrar una palabra bloqueadora en cualquier posición, y seguirá siendo bloqueadora.

Observacion 3 Sea w una palabra bloqueadora (de largo $2n + 1$), y B el bloque de ancho $2p + 1$ determinada por w . Ocurre que gracias a que F es homogéneo, en realidad se cumple:

$$\forall s \in \mathbb{Z}, \quad \forall x \in [b_{-n} \dots b_n]_{-n+s}, \quad F^l(x)_{j+s} = B_{l, j+p} \quad \forall -p \leq j \leq p, \quad \forall l \in \mathbb{N}$$

La observación anterior puede resumirse en que, por lo general, si w es una palabra bloqueadora, entonces se tendrá:

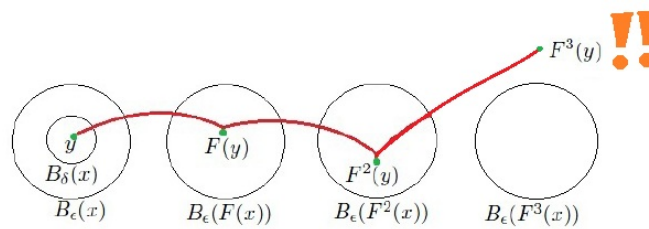


Sensibilidad

Definición 14 Diremos que F es sensible a las condiciones iniciales ssi

$$\exists \epsilon > 0, \forall x \in Q^{\mathbb{Z}}, \forall \delta > 0, \exists y \in B_{\delta}(x), \exists n \in \mathbb{N}, d(F^n(x), F^n(y)) > \epsilon$$

F será entonces, sensible a las condiciones iniciales, si existe una distancia ϵ tal que, dado un x , siempre puedo encontrar un y tan cerca como quiera, tal que una de sus imágenes sucesivas eventualmente se separará más que ϵ . Notemos que esta definición lleva implícito que no existen puntos equicontínuos (sin embargo, es más fuerte que la negación de su existencia).



Definición 15 Ahora un par de casos relevantes:

1. Se dice que F es positivamente expansiva si $\exists \epsilon > 0, \forall x, y \in Q^{\mathbb{Z}}, x \neq y, \exists n \in \mathbb{N}, d(F^n(x), F^n(y)) > \epsilon$
2. Se dice que F es expansiva si es biyectiva y $\exists \epsilon > 0, \forall x, y \in Q^{\mathbb{Z}}, x \neq y, \exists n \in \mathbb{Z}, d(F^n(x), F^n(y)) > \epsilon$

Llamaremos a ϵ la constante de expansividad de F

La propiedad de ser positivamente expansivo, es mucho más fuerte que ser sensible a las condiciones iniciales, pues, mientras que el segundo indica que dado x , siempre puedo encontrar un y que eventualmente se aleja, en el primero se tiene que dado x , todos los y se alejan en algún momento.

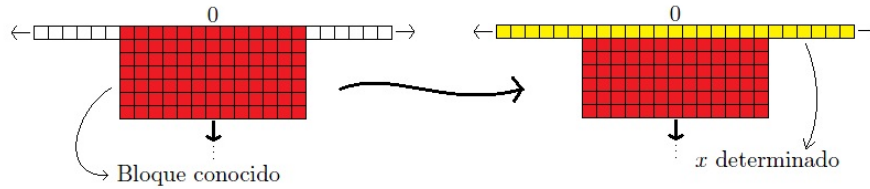
Si F es expansivo, significa que dado un x , cualquier y posee una imagen (iterando F en y) o una preimagen (iterando F^{-1} en y) que se aleja de la respectiva imagen o preimagen de x

Proposición 5 *Se cumple que:*

1. *Sea F positivamente expansiva, y $N = \lceil -\log_2(\epsilon) \rceil$, siendo ϵ la constante de expansividad de F , entonces, si conozco $[F^n(x)_{-N}, \dots, F^n(x)_N]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces conozco x*
2. *Sea F expansiva, y $N = \lceil -\log_2(\epsilon) \rceil$, siendo ϵ la constante de expansividad de F , entonces, si conozco $[F^n(x)_{-N}, \dots, F^n(x)_N]$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, entonces conozco x*

La demostración es directa de la definición en ambos casos (se demuestra por contradicción)

En el caso positivamente expansivo, ilustramos la última propiedad con el siguiente diagrama (el caso expansivo es básicamente lo mismo):



Subshift y Sistemas Dinámicos

Subshift para el caso $N = \mathbb{Z}$

Definición 16 *Definimos $(Q^{(2n+1)})^{\mathbb{Z}}$ como el conjunto de todas las matrices de ancho $2n+1$ y de alto infinito (hacia arriba y hacia abajo), a valores en Q*

Definición 17 *Si F es biyectiva, se define*

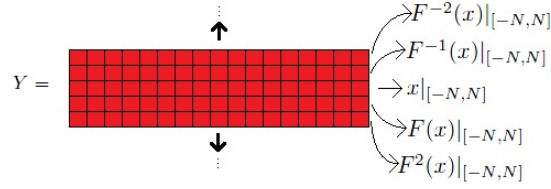
$$S_F^{(N)} := \{y \in (Q^{(2n+1)})^{\mathbb{Z}}, \exists x \in Q^{\mathbb{Z}}, \forall i \in \mathbb{Z}, \forall j \in \{-N, \dots, N\}, y_{ij} = (F^i(x))_j\}$$

Para algún $x \in Q^{\mathbb{Z}}$, cuya existencia implica que $y \in S_F^{(N)}$, diremos que induce a y

Es decir, $S_F^{(N)}$ es el conjunto de todas las matrices en $(Q^{2N+1})^{\mathbb{Z}}$, que son producidas al componer algún x , de forma iterativa con F (hacia abajo), y con F^{-1} (hacia arriba):

A $S_F^{(N)}$ se le llama un subshift vertical de rango N de F

Supongamos que F es expansiva. Si el N anterior es como el de la proposición 4, llamamos a $S_F^{(N)}$ simplemente S_F , y para cada elemento y de S_F , el elemento $x \in Q^{\mathbb{Z}}$ que lo induce es único.



Esto permite generar la siguiente función:

Definición 18 Se define la función $\Psi := S_F \rightarrow Q^{\mathbb{Z}}$ tal que $\Psi(y) = x$, siendo $x \in Q^{\mathbb{Z}}$ el único elemento que induce a y

Notemos que Ψ es claramente biyectiva

Proposición 6 S_F es un cerrado dentro de $(Q^{2n+1})^{\mathbb{Z}}$ (dotado de la topología de los cilindros), y Ψ^{-1} es bicontinua

La demostración de la bicontinuidad de Ψ^{-1} es trivial (utilizando sucesiones se tiene el resultado).

Veamos entonces que S_F es cerrado:

Sea $y \in (Q^{2N+1})^{\mathbb{Z}}$ y $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq S_F$ una sucesión tal que $y_n \rightarrow y$. Debemos probar que $y \in S_F$.

Recordemos que en la topología de los cilindros se tiene que

$$y_n \rightarrow y \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, (y_n)|_{[-m,m]} = (y)|_{[-m,m]}$$

Y en este caso en particular, dado que los y_n son matrices;

$$y_n \rightarrow y \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall j \in \{-m, \dots, m\}, \forall k \in \{-N, \dots, N\}, (y_n)_{j,k} = (y)_{j,k}$$

Definiremos entonces, para cada m ;

$$D_m := \{x \in Q^{\mathbb{Z}}, \forall j \in \{-m, \dots, m\}, \forall k \in \{-N, \dots, N\}, (F^j(x))_k = y_{j,k}\}$$

Si llamamos $w_j \in Q^{\mathbb{Z}}$ a $(y)|_j$, se tendrá que

$$D_m = \left(\bigcap_{j=1}^m F^j([w_{-j}]_{[-N,N]}) \right) \cap [w_0]_{[-N,N]} \cap \left(\bigcap_{j=1}^m F^{-j}([w_j]_{[-N,N]}) \right)$$

Luego, como F es autómata celular biyectivo, se tiene que es de inversa continua, y entonces la intersección anterior es de conjuntos cerrados, por lo que D_m es cerrado. Notemos además, que para n suficientemente

grande, $\Psi(y_n) \in D_m$, luego, $D_m \neq \emptyset$.

Notando que los D_m son decrecientes, se tendrá la propiedad de la intersección finita. Como el espacio es compacto (pues Q^{2N+1} lo es), se tendrá que $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} D_m \neq \emptyset$.

Tomemos un elemento $x \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} D_m$. Como $\forall i \in \mathbb{Z}$, $x \in D_{|i|}$, necesariamente $\forall j \in \{-N, \dots, N\}$ $F^i(x)_j = y_{i,j}$, de donde se deduce:

$$\forall i \in \mathbb{Z}, \forall j \in \{-N, \dots, N\}, F^i(x)_j = y_{i,j}$$

Y entonces x induce a y , por lo que $y \in S_F$

■

Definición 19 Se define $\sigma := Q^{\mathbb{Z}} \rightarrow Q^{\mathbb{Z}}$ de la forma usual (en que $\sigma(Y)_{i,j} = Y_{i+1,j}$)

Claramente, como F es biyectiva, σ es biyectiva. Además, si $y \in S_F$, entonces $\sigma(y) \in S_F$ (basta tomar $F(x)$, que induce $\sigma(y)$), esto nos dice que S_F es cerrado para σ

Definición 20 $S \subseteq B^{\mathbb{Z}}$, con S cerrado, se dice subshift si $\sigma(S) = S$

Esta definición es importante, pues según los resultados anteriores, se tiene que (S_F, σ) es un subshift (cerrado e invariante para σ)

Sistemas Dinámicos en el contexto anterior

Definición 21 Un sistema dinámico es un par de la forma (X, F) en que X es un conjunto compacto y F es una función continua

Definición 22 Se define la relación de equivalencia "ser conjugados" entre sistemas dinámicos $(X, F) \cong (Y, T)$ que se cumple ssi $\exists \Psi$ biyectiva y bicontinua, $\Psi : X \rightarrow Y$ tal que $\Psi^{-1} \circ F \circ \Psi = T$

Si dos sistemas dinámicos son conjugados, se tendrá que comparten una cantidad muy grande de propiedades (en general, podremos decir que son iguales en los aspectos que nos interesan)

Proposición 7 $\sigma = \Psi^{-1} \circ F \circ \Psi$

La demostración de esto es trivial. Notemos que hemos probado que $(Q^{\mathbb{Z}}, F)$ es conjugado con (S_F, σ) . La utilidad de esto es que en lugar de estudiar F , estudiamos σ .

Para el caso F positivamente expansivo, se puede definir S_F de forma análoga (y obtenemos las mismas propiedades anteriores), sin embargo, veremos más adelante, S_F es en realidad un subshift de tipo finito, en que:

Definición 23 *S se dice subshift de tipo finito ssi es subshift y $\exists W \subseteq B^+$ finito tal que*

$$\forall x \in B^{\mathbb{Z}}, x \in S \Leftrightarrow \text{ninguna palabra de } W \text{ aparece en } x$$

En general, los subshift de tipo finito son bastante más sencillos de estudiar (tienen propiedades útiles)

Caso $N = \mathbb{N}$

Notemos que en este caso, $Q^{\mathbb{N}}$ también resulta ser compacto, además, definiendo la métrica

$$h : Q^{\mathbb{N}} \times Q^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(x, y) = 2^{-n(x, y)} \text{ con } n(x, y) = \inf\{i : i \in \mathbb{N}, y_i \neq x_i\}$$

Se tendrá (al igual que en el caso $N = \mathbb{Z}$), que tal métrica induce la topología de los cilindros.

Finalmente, definiendo el shift: $\sigma : Q^{\mathbb{N}} \rightarrow Q^{\mathbb{N}}, \sigma(x)_i = x_{i+1}$, se tienen los mismos resultados mostrados hasta ahora en el caso $N = \mathbb{Z}$

Resultados en Teoría Ergódica y Dinámica Topológica

Entropía

Sea (X, T) un sistema dinámico. Dado $\tilde{\mu}$ un recubrimiento abierto de X , podemos tomar un subrecubrimiento μ finito (indexado, digamos con los elementos de J finito).

Definición 24 Se define $\mu_0^{n-1}(X) := \{U_{j_{t_0}} \cap T^{-1}(U_{j_{t_1}}) \cap \dots \cap T^{-n+1}(U_{j_{t_{n-1}}}), j_{t_0}, \dots, j_{t_{n-1}} \in J, \}$

En que $U_j = u_j \cap X$, con $u_j \in \mu$

Notemos que $u_{j_{t_0}} \cap T^{-1}(u_{j_{t_1}}) \cap \dots \cap T^{-n+1}(u_{j_{t_{n-1}}}) \neq \emptyset$ ssi hay algún $x \in X$, tal que $x \in u_{j_{t_0}}, T(x) \in u_{j_{t_1}}, \dots, T^{n-1}(x) \in u_{j_{t_{n-1}}}$.

Esto quiere decir que cada elemento de $\mu_0^{n-1}(X)$ representa un camino de largo n para los elementos de x , (es, de hecho, el conjunto de todos los x que pasan por ese camino)

Notación 5 Diremos que $S \subseteq J^n$ es un conjunto camino-recubridor de secuencias de $\mu_0^{n-1}(X)$ ssi $\forall x \in X, \exists s \in S, s = (j_{t_0}, j_{t_1}, \dots, j_{t_{n-1}})$, tal que $x \in U_{j_{t_0}} \cap T^{-1}(U_{j_{t_1}}) \cap \dots \cap T^{-n+1}(U_{j_{t_{n-1}}})$

Los elementos de J^n son los nombres de los caminos en $\mu_0^{n-1}(X)$, luego, $S \subseteq J^n$ recubre los caminos si para todo $x \in X$ puedo encontrar un camino dentro de S por el que pase (notemos que si los abiertos de μ no son disjuntos, entonces puede haber un x que pase por más de un camino)

Definición 25 Llamaremos $\eta(\mu_0^{n-1}(X)) = \min\{|S|, S \text{ es camino-recubridor de } \mu_0^{n-1}(X)\}$

La idea intuitiva es que este valor es el número de caminos que se pueden observar al iterar T , $n - 1$ veces

Definicion 26 Se define $H(\mu_0^{n-1}) = \log(\eta(\mu_0^{n-1}(X)))$

Proposicion 8 $H(\mu_0^{n+m-1}) \leq H(\mu_0^{n-1}) + H(\mu_0^{m-1})$

Demostración:

Sea S un camino-recubridor de $\mu_0^{n+m-1}(X)$ minimal. Para una secuencia $h \in S$ definimos h_0^{n-1} como la secuencia que contiene sus primeras n coordenadas, y h_n^{n+m-1} como la secuencia que contiene sus restantes m coordenadas.

$$h = (\underbrace{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}}_{h_0^{n-1}}, \underbrace{a_n, \dots, a_{n+m-1}}_{h_n^{n+m-1}})$$

Definimos entonces S_n, S_m como los h_0^{n-1} y h_n^{n+m-1} con $h \in S$. Es claro que $S \subseteq S_n \times S_m$

Notemos que S_n es camino-recubridor de $\mu_0^{n-1}(X)$ y que es minimal pues S es minimal. Así mismo, S_m es camino-recubridor para $\mu_0^{m-1}(T^n(X))$, y es minimal para este conjunto, pues S es minimal

Utilizando lo anterior,

$$\eta(\mu_0^{n+m-1}(X)) = |S| \leq |S_n \times S_m| = |S_n| \cdot |S_m| = \eta(\mu_0^{n-1}(X)) \cdot |S_m|$$

Pero como S_m es camino-recubridor para el conjunto $T^n(X) \subseteq X$, y es minimal, se tendrá que $|S_m| \leq \eta(\mu_0^{m-1}(X))$ (esto es claro, pues si hay menos puntos, hay menos caminos posibles).

Es claro entonces, que $\eta(\mu_0^{n+m-1}(X)) \leq \eta(\mu_0^{n-1}(X))\eta(\mu_0^{m-1}(X))$, y aplicando logaritmo, se tendrá que

$$H(\mu_0^{n+m-1}) \leq H(\mu_0^{n-1}) + H(\mu_0^{m-1})$$

■

Notemos que hemos definido $H(\mu_0^{n-1})$ que contiene la cantidad de caminos que somos capaces de ver al iterar T $n - 1$ veces. Sin embargo, nos gustaría obtener una noción de todos los caminos que podemos ver al iterar T de forma indefinida. Para ello, será de utilidad el siguiente lema:

Lema 3 Sea $\{a_n\}$ tal que $a_n > 0$ y $a_{n+m} \leq a_n + a_m$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{n}$

Demostración:

Notemos primero que por la sub-aditividad, se puede mostrar por inducción, que para todo par de naturales m, n , se tiene que $a_{mn} \leq m \cdot a_n$

Sea $c = \inf_{b \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{n}$ (existe, pues la sucesión está acotada por 0). Consideremos n_0 tal que $\frac{a_{n_0}}{n_0} \leq c + \frac{\epsilon}{2}$.

Tomemos para tal n_0 , $M := \max_{1 \leq i \leq n_0} \{a_i\}$, y escojamos N' tal que $\forall n \geq N'$, $\frac{M}{n} \leq \frac{\epsilon}{2}$

Escogemos $N = \max\{N', n_0\}$. Por el algoritmo de división, $\forall n \geq N$, podemos encontrar $q, r \in \mathbb{N}$, únicos, tales que $n = q \cdot n_0 + r$, y $r < n_0$. De esta forma:

$$\forall n \geq N, \frac{a_n}{n} = \frac{a_{qn_0+r}}{n} \leq \frac{qa_{n_0} + a_r}{n} = \frac{qa_{n_0}}{qn_0 + r} + \frac{a_r}{n} \leq \frac{a_{n_0}}{n_0} + \frac{M}{n} \leq c + \epsilon$$

Luego, $\frac{a_n}{n} \rightarrow c$, que es lo que se quería probar

■

Definición 27 Se define la entropía topológica de T en μ como $h_{top}(\mu, T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\mu_0^{n-1})$

Por el lema anterior, la entropía topológica está bien definida, y contiene la noción de cuántos caminos se pueden observar al iterar T indefinidamente. Sin embargo, estos caminos están dados por el recubrimiento elegido, lo que es un inconveniente, por lo que se define la entropía de la siguiente manera:

Definición 28 Se define la entropía de T , $h_{top}(T) = \sup_{\mu} h_{top}(\mu, T)$

Ahora, veremos de forma rápida una forma alternativa de calcular la entropía:

Definición 29 $x, y \in X$ son (n, ϵ) -separados si $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$, se tiene que $d(T^i(x), T^i(y)) > \epsilon$

Definición 30 $E \subseteq X$ es (n, ϵ) -separado ssi $\forall x, y \in E$, x e y son (n, ϵ) -separados

Definición 31 Se define $r_n(\epsilon) = \max\{|E|, E \text{ es } (n, \epsilon)\text{-separado}\}$

Teorema 5 $h_{top}(T) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(r_n(\epsilon))$

Notación 6 En lo que resta del apunte, nos referiremos a $\mu_0^{n-1}(X)$ sencillamente como μ_0^{n-1}

Finalmente, veremos una proposición que nos será de ayuda al tratar con autómatas celulares:

Proposición 9 Sean μ, ν dos recubrimientos finitos de abiertos de X , entonces, si ν es más fino que μ , se tendrá que $h_{top}(\mu, T) \leq h_{top}(\nu, T)$

Notemos que el resultado es intuitivo, pues, debido a que ν es más fino que μ , necesita más caminos para cubrir X , luego, $\eta(\mu_0^{n-1}(X)) \leq \eta(\nu_0^{n-1}(X))$ para cualquier n . Tomando logaritmo, obtenemos $H(\mu_0^{n-1}) \leq H(\nu_0^{n-1})$, y entonces se llega al resultado al dividir por n y obtener el límite

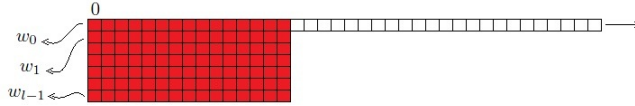
Entropía en Autómatas Celulares

Definición 32 Para el caso $N = \mathbb{Z}$ se define μ_n como el recubrimiento de cilindros de largo $2n + 1$ centrados en cero (Para el caso $N = \mathbb{N}$, tomaremos los cilindros centrados en 0 y de largo $n + 1$).

¿Cómo se ve un elemento en $(\mu_n)_0^{l-1}$?

Sea $c \in (\mu_n)_0^{l-1}$. c tiene la forma $[w_0]_{-n} \cap F^{-1}([w_1]_{-n}) \cap \dots \cap F^{-l+1}([w_{l-1}]_{-n})$, luego un x está en c ssi $x \in [w_0]_{-n}$, $F(x) \in [w_1]_{-n}$, \dots , $F^{l-1}(x) \in [w_{l-1}]_{-n}$

Es decir, x está en c ssi podemos leer el bloque formado por los w_j :



(Notemos que la figura corresponde al caso \mathbb{N})

Proposición 10 Sea μ recubrimiento abierto finito de $Q^{\mathbb{Z}}$ (digamos, indexado por el conjunto I), entonces $\exists n \in \mathbb{N}$, tal que $\forall u \in \mu$, $\exists w \in Q^{2n+1}$, $[w]_{-n} \subseteq u$. Se tiene un resultado análogo para el caso $N = \mathbb{N}$

Lo demostraremos para el caso $N = \mathbb{Z}$:

Recordemos que los cilindros son una base de abiertos de la topología, luego, $\forall i \in I$, $\exists n_i \in \mathbb{N}$, tal que $\exists w_i \in Q^{2n_i+1}$, $[w_i]_{-n_i} \subseteq u_i$.

Tomemos $n = \max\{n_i\}$. Recordemos que si $n > n_i$, podemos tomar un $z_i \in Q^{n-n_i}$ cualquiera, y se tendrá que $[z_i w_i z_i]_{-n} \subseteq [w_i]_{-n_i}$, de donde se tiene el resultado.

■

Proposición 11 En $Q^{\mathbb{Z}}$ y $Q^{\mathbb{N}}$ se tiene que $h_{top}(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_{top}(\mu_n, T)$

Demostración (para el caso $N = \mathbb{Z}$):

Sea μ un recubrimiento abierto cualquiera. Por la proposición 10, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\forall u \in \mu, \exists w \in Q^{2n+1}, [w]_{-n} \subseteq u$.

Como cada $[w]_{-n}$ pertenece a μ_n (el recubrimiento de cilindros de largo $2n + 1$), es claro que μ_n es más fina que μ . Por la proposición 9, esto implica que $h_{top}(\mu, T) \leq h_{top}(\mu_n, T)$.

Por la desigualdad anterior, se tendrá necesariamente que $\sup_{\mu} h_{top}(\mu, T) \leq \sup_n h_{top}(\mu_n, T)$.

Por otro lado, es claro que $\{\mu_n\}$ es una subcolección de recubrimientos finitos, luego, necesariamente, $\sup_n h_{top}(\mu_n, T) \leq \sup_{\mu} h_{top}(\mu, T)$, de donde obtenemos la igualdad.

Finalmente, notemos que $\{\mu_n\}$ es una subcolección creciente de recubrimientos (ordenados de acuerdo a la relación de ser más finos), luego, por la proposición 9, $\{h_{top}(\mu_n, T)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión monótona creciente, y se tiene

$$\sup_n h_{top}(\mu_n, T) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_{top}(\mu_n, T)$$

De donde se concluye el resultado

■

Proposición 12 Si μ es una partición abierta y finita de X , entonces, $\eta(\mu_0^{n-1}) = |(\mu_0^{n-1})_*|$ en que $(\mu_0^{n-1})_* := \mu_0^{n-1} - \{\emptyset\}$

Demostración:

Sea $c \in (\mu_0^{n-1})_*$. Como $c \neq \emptyset$, $\exists x \in c$, es decir:

$$x \in u_{t_0}, F(x) \in u_{t_1}, \dots, F^{n-1}(x) \in u_{t_{n-1}}$$

Por otro lado, μ es partición, por lo tanto se cumple:

$$\forall j \neq t_0, x \notin u_j, \forall j \neq t_1, F(x) \notin u_j, \dots, \forall j \neq t_{n-1}, F^{n-1}(x) \notin u_j$$

Y entonces, la secuencia $(t_0, t_1, \dots, t_{n-1})$ es el único camino posible para x , y por lo tanto, debe pertenecer a cualquier S camino-recubridor.

Como esto ocurre $\forall c \in (\mu_0^{n-1})_*$, se tendrá que $|(\mu_0^{n-1})_*| \leq |S|$ para todo S camino-recubridor. En particular, $|(\mu_0^{n-1})_*| \leq \eta(\mu_0^{n-1})$.

Notando que las secuencias generadas por los $c \in (\mu_0^{n-1})_*$ cubren μ_0^{n-1} , se tiene la igualdad.

□

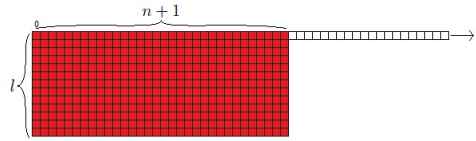
Teorema 6 En el caso $Q^{\mathbb{N}}$ se tiene que $h_{top}(F) = h_{top}(\mu_{r-1}, F)$ donde r es el radio de la regla local de F

Demostración:

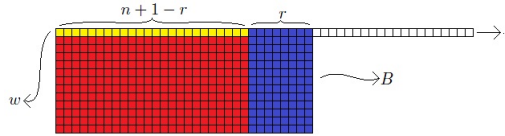
Antes de demostrar el teorema, veamos primero que $|((\mu_n)_0^{l-1})_*| = |((\mu_{r-1})_0^{l-1})_*| \cdot |Q|^{n-r+1}$.

Para hacer más fácil la notación, llamemos sencillamente ν_n a $((\mu_n)_0^{l-1})_*$, y ν_{r-1} a $((\mu_{r-1})_0^{l-1})_*$.

Sea c un elemento de ν_n , y $x \in c$. Notemos que c es de la forma:



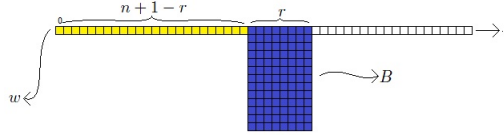
(Esto es, asumiendo que podemos hablar de c y del bloque que induce como el mismo objeto). En particular, podemos reconocer que tal bloque induce de forma única a



En que w es una palabra de largo $n+1-r$, y el bloque B es un elemento de $((\mu_{r-1})_0^{l-1})$. Dado que (por la shift-invarianza) $\sigma^{n-r+1}(x) \in B$, se tiene que $B \neq \emptyset$, y entonces $B \in \nu_{r-1}$.

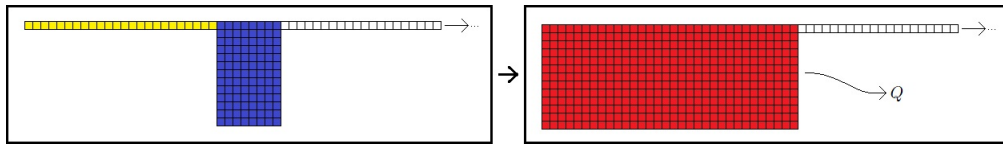
De esta forma, c induce de forma única un elemento de $Q^{n-r+1} \times \nu_{r-1}$.

Por otro lado, sea $(w, B) \in Q^{n-r+1} \times \nu_{r-1}$. Consideramos algún $x \in B$ (B es no vacío). Tomando $y = wx$ el único elemento tal que $y|_{[0, n-r]} = w$ y $\sigma^{n-r+1}(y) = x$, se cumple que, $\sigma^{n-r+1}(y) \in B$, y, por lo tanto, podemos leer en y la siguiente figura:



Notemos que, dado que conocemos las primeras $n + 1$ coordenadas de y , podemos conocer las primeras $n - r + 1$ coordenadas de $F(y)$. Además, como conocemos $F(y)$ entre $n - r + 1$ y n (pues $\sigma^{n-r+1}(y) \in B$), se tiene que, en realidad, conocemos las primeras $n + 1$ coordenadas de $F(y)$

Si siguiendo este argumento de forma recursiva, podemos concluir que conocemos el bloque completo:



En que $Q \in \nu_{n-1}$ (es no vacío, pues $y \in Q$).

Así, hemos mostrado que para cada elemento en $Q^{n-r+1} \times \nu_{r-1}$, le corresponde un único elemento en ν_{n-1} y viceversa, por lo que se tiene

$$|\nu_{n-1}| = |\nu_{r-1} \times Q^{n-r+1}| = |\nu_{r-1}| \cdot |Q|^{n-r+1}$$

Que es lo que queríamos probar.

Para concluir el teorema, notemos que μ_n y μ_{r-1} son particiones de abiertos, luego, por la proposición anterior:

$$\begin{aligned} h_{top}(\mu_n, F) &= \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \log(\eta((\mu_n)_0^{l-1})) \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \log(|\nu_n|) \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \log(|\nu_{r-1}| \cdot |Q|^{n-r+1}) \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \log(|\nu_{r-1}|) + \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{n-r+1}{l} \log(|Q|) \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \log(\eta((\mu_{r-1})_0^{l-1})) \\ &= h_{top}(\mu_{r-1}, F) \end{aligned}$$

Luego, $h_{top}(\mu_n, F) = h_{top}(\mu_{r-1}, F)$, $\forall n \geq r - 1$, de donde se concluye que

$$h_{top}(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_{top}(\mu_n, F) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_{top}(\mu_{r-1}, F) = h_{top}(\mu_{r-1}, F)$$

■

Veamos a continuación un resultado que nos será de utilidad más adelante:

Proposición 13 *La entropía topológica de $(Q^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ es $\log(|Q|)$. (Se tiene el mismo resultado para $Q^{\mathbb{N}}$)*

Demostración:

Sea μ_m el recubrimiento de cilindros centrados en 0 de largo $2m + 1$. Notemos que hay $|Q|^{2m+1}$ de tales cilindros (y son todos no vacíos), luego $\eta((\mu_m)_0^0) = |Q|^{2m+1}$

Sea u uno de tales cilindros y $x \in u$. Se tiene que $\sigma(x)|_{[-m, m-1]} = x|_{[-m+1, m]}$ (recordemos que tales valores están fijos, por estar x en u). Luego, la única coordenada en $[-m, m]$ que no está fija para $\sigma(x)$ es la coordenada m , que puede tomar cualquier valor en Q . Así, $\eta((\mu_m)_0^1) = |Q|^{2m+1+1}$ (pues por cada cilindro, podemos pasar a otros $|Q|$ cilindros).

Utilizando el mismo criterio para $\sigma^{i+1}(x)$ y $\sigma^i(x)$, tendremos inductivamente que $\eta((\mu_m)_0^n) = |Q|^{2m+1+n}$, con lo que, la entropía para tal recubrimiento será:

$$h_{top}(\mu_m, \sigma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(|Q|^{2m+n+1}) = \log(|Q|)$$

Como esto se cumple para todo m , se concluye que $h_{top}(\sigma) = \log(|Q|)$

■

Para concluir esta sección, adjuntamos un par de resultados que nos serán útiles en el último capítulo:

Teorema 7 *Sea A matriz cuadrada a valores naturales tal que A es irreducible. En este caso, $\exists \lambda > 0$ (llamado el valor propio de Perron), tal que:*

1. λ es valor propio de A
2. $\forall u$ valor propio de A , $|u| < \lambda$
3. $\ker(A - \lambda I) = \langle u \rangle$ para algún $u > 0$

Teorema 8 *Sea G un grafo dirigido conexo finito, y sea Σ el conjunto de todos los paseos infinitos (en uno o ambos sentidos) por el grafo. Entonces se tendrá que la entropía topológica de (Σ, σ) es el logaritmo del valor propio de Perron de la matriz A de incidencia del grafo*

Dinámica topológica

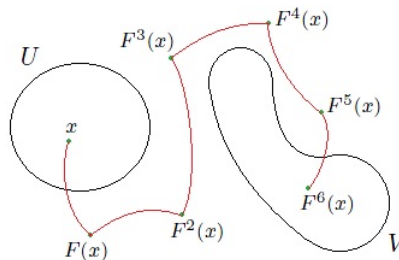
Nos interesa estudiar y clasificar los distintos sistemas dinámicos de acuerdo a sus propiedades. Para ello, se definen las siguientes propiedades:

Definición 33 *Se define:*

1. (X, T) es transitivo si $\forall u, v \neq \emptyset$ abiertos de X , $\exists n \geq 0$ tal que $U \cap T^{-n}(V) \neq \emptyset$
2. (X, T) es minimal si $\forall x \in X$, $\overline{\text{orb}_+(x)} = X$
3. (X, T) es débilmente mezclador si $(X \times X, T \times T)$ es transitivo
4. (X, T) es mezclador ssi $\forall U, V$ abiertos no vacíos de X , $\exists N \geq 0$, $\forall n \geq N$, $U \cap T^{-n}(V) \neq \emptyset$

Nos interesan particularmente las propiedades de ser transitivo y mezclador:

1. El que T sea transitivo, nos indica que, dados dos abiertos cualesquiera, U y V , al iterar los elementos de U , eventualmente, alguno de ellos caerá en V
2. La propiedad de ser mezclador es aún más fuerte que la propiedad anterior, pues establece que para un número cualquiera n suficientemente grande, existe un elemento en U que llega en n iteraciones a V



Definición 34 *Un conjunto $A \subseteq X$ se dice residual si contiene una intersección numerable de abiertos densos en X*

Notemos que un espacio métrico compacto, en particular es completo, luego, por el lema de Baire, un conjunto residual es denso (y viceversa)

Definición 35 (X, T) se dice casi-equicontínuo si el conjunto ξ de sus puntos equicontínuos es residual

Proposición 14 Si ξ es el conjunto de los puntos equicontínuos de X , se tiene que $T^{-1}(\xi) \subseteq \xi$

Demostración:

Sea $x \in T^{-1}(\xi)$, luego, $T(x) = y \in \xi$.

Tomemos $\epsilon > 0$ cualquiera. Como $y \in \xi$, existe $\delta > 0$, tal que $d(z, y) < \delta \Rightarrow d(T^n(z), T^n(y)) < \epsilon \forall n \in \mathbb{N}$. En particular podemos tomar $\delta < \epsilon$ que cumpla la propiedad anterior.

Por otro lado, como T es continua, $\exists \nu > 0$, tal que $d(\hat{x}, x) < \nu \Rightarrow d(T(\hat{x}), y) < \delta < \epsilon$. Así, $d(\hat{x}, x) < \nu \Rightarrow d(T(\hat{x}), T(x)) = d(T(\hat{x}), y) < \delta < \epsilon$, y entonces

$$d(T^n(\hat{x}), T^n(x)) = d(T^{n-1}(T(\hat{x}), T^{n-1}(y))) < \epsilon \forall n \in \mathbb{N}$$

□

Definición 36 Sea $\epsilon > 0$, se define $\xi_\epsilon := \{x \in X, \exists \delta > 0, \forall y, z \in B_\delta(x), \forall n \geq 0, d(T^n(y), T^n(z)) < \epsilon\}$

El conjunto ξ_ϵ es el conjunto de todos los puntos x , tales que si dos puntos z e y son parecidos a x (en el sentido de la métrica), entonces para cada n , $T^n(y)$ es parecido a $T^n(z)$

Proposición 15 Se tienen los siguientes resultados:

1. $T^{-1}(\xi_\epsilon) \subseteq \xi_\epsilon$
2. ξ_ϵ es abierto
3. $\xi = \bigcap_{n \geq 1} \xi_{\frac{1}{n}}$

Demostración:

1. Sea $x \in T^{-1}(\xi_\epsilon)$. Por pertenecer $T(x)$ a ξ_ϵ , existe un $\delta > 0$ (que podemos tomar menor que ϵ), tal que $\forall y, z \in B_\delta(T(x)), \forall n \geq 0, d(T^n(y), T^n(z)) < \epsilon$.

Por la continuidad de T , podemos encontrar $\nu > 0$, tal que $\forall \hat{x} \in B_\nu(x), d(T(\hat{x}), T(x)) < \frac{\delta}{2}$

Luego, $\forall \hat{x}_1, \hat{x}_2 \in B_\nu(x), d(T(\hat{x}_1), T(\hat{x}_2)) \leq d(T(\hat{x}_1), T(x)) + d(T(x), T(\hat{x}_2)) \leq \delta$

De esta forma, $T(\hat{x}_1), T(\hat{x}_2) \in B_\delta(T(x))$, y por esto último, $d(T^n(\hat{x}_1), T^n(\hat{x}_2)) < \epsilon$ para cualquier $n \geq 1$.

Concluimos finalmente que

$$\forall \hat{x}_1, \hat{x}_2 \in B_\nu(x), d(T^n(\hat{x}_1), T^n(\hat{x}_2)) < \epsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

□

2. Sea $x \in \xi_\epsilon$. Tomemos $\delta > 0$ tal que $\forall y, z \in B_\delta(x), d(T^n(y), T^n(z)) < \epsilon$.

Veremos que $B_{\frac{\delta}{2}}(x) \subseteq \xi_\epsilon$

Tomemos un $\hat{x} \in B_{\frac{\delta}{2}}(x)$ cualquiera, y consideremos la bola $B_{\frac{\delta}{2}}(\hat{x})$. Sean $y, z \in B_{\frac{\delta}{2}}(\hat{x})$. Se tiene que:

$$\begin{aligned} d(y, x) &\leq d(y, \hat{x}) + d(\hat{x}, x) \leq \delta \\ d(z, x) &\leq d(z, \hat{x}) + d(\hat{x}, x) \leq \delta \end{aligned}$$

Luego, $y, z \in B_\delta(x)$, y por lo tanto, $d(T^n(y), T^n(z)) < \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$

De esta forma hemos encontrado $\frac{\delta}{2}$ tal que $\forall y, z \in B_{\frac{\delta}{2}}(\hat{x}), d(T^n(y), T^n(z)) < \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$, lo que nos garantiza que $\hat{x} \in \xi_\epsilon$.

Lo anterior indica que $B_{\frac{\delta}{2}}(x) \subseteq \xi_\epsilon$, y como x es cualquiera, se concluye que ξ_ϵ es abierto

□

3. Veamos que $\xi = \bigcap_{n \geq 1} \xi_{\frac{1}{n}}$:

□: Sea $x \in \xi$. Por definición sabemos que existe un $\delta > 0$, tal que $\forall y \in B_\delta(x), d(T^n(y), T^n(x)) < \frac{1}{2n}$

Sean $y, z \in B_\delta(x)$, entonces $d(T^n(y), T^n(z)) \leq d(T^n(y), T^n(x)) + d(T^n(x), T^n(z)) < \frac{1}{n}$.

Así, $x \in \xi_{\frac{1}{n}}$, y esto se cumple para todo n , lo que indica que x pertenece a la intersección de los $\xi_{\frac{1}{n}}$

□: Sea $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \xi_{\frac{1}{n}}$. Tomemos $\epsilon > 0$ cualquiera. Sabemos que existe un m en \mathbb{N} , tal que $\epsilon > \frac{1}{m}$.

Como $x \in \xi_{\frac{1}{m}}$, existe un $\delta > 0$, tal que $\forall y, z \in B_\delta(x), d(T^n(y), T^n(z)) < \frac{1}{n} < \epsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

En particular, tomando $z = x$, tendremos que $\forall y \in B_\delta(x), d(T^n(y), T^n(x)) < \epsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, con lo que concluimos que x es equicontínuo.

□

Teorema 9 Si (X, T) es transitivo, entonces o es sensible a las condiciones iniciales, o es casi-equicontinuo

Demostración:

Veamos que si $\xi_\epsilon \neq \emptyset$, entonces $\overline{\xi_\epsilon} = X$:

En efecto: si $\overline{\xi_\epsilon} \neq X$, podemos tomar $U = X - \overline{\xi_\epsilon}$ que es abierto, no vacío y disjunto con ξ_ϵ .

Por transitividad, existe un $n > 0$ tal que $U \cap T^{-n}(\xi_\epsilon) \neq \emptyset$. Como $T^{-n}(\xi_\epsilon) \subseteq \xi_\epsilon$, lo anterior implica que $U \cap \xi_\epsilon \neq \emptyset$ (contradicción, pues habíamos dicho que U era disjunto con ξ_ϵ).

Por otro lado, notemos que si $\xi_\epsilon = \emptyset$, se tendrá que:

$$\forall x \in X, \forall \delta > 0, \exists y, z \in B_\delta(x), \exists n \geq 0, d(T^n(z), T^n(y)) > \epsilon$$

En particular, tomando $z = x$, se tendrá:

$$\forall x \in X, \forall \delta > 0, \exists y \in B_\delta(x), \exists n \geq 0, d(T^n(x), T^n(y)) > \epsilon$$

Que es la definición de ser sensible a las condiciones iniciales (con constante ϵ).

De esta forma, hay dos casos posibles:

1. $\boxed{\forall n \geq 1, \xi_{\frac{1}{n}} \neq \emptyset}$ En este caso, como $\xi = \bigcap_{n \geq 1} \xi_{\frac{1}{n}}$ y cada $\xi_{\frac{1}{n}}$ es un abierto denso, entonces ξ es residual (luego, (X, T) es casi-equicontinuo)
2. $\boxed{\exists n \in \mathbb{N}, \xi_{\frac{1}{n}} = \emptyset}$. En este caso, el sistema es sensible a las condiciones iniciales, con constante $\frac{1}{n}$

■

Observacion 4 Si (X, T) es transitivo, entonces es sobreyectivo

Demostración:

Notemos que como X es compacto y T es continua, $T(X)$ es compacto. En particular, se tiene que $T(X)$ es cerrado, luego, $(T(X))^c$ es abierto.

Si el conjunto anterior es no vacío, como T es transitivo, existen $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$, tales que $T^n(x) \in (T(X))^c$ (lo que es una contradicción, pues, si llamamos y a $T^{n-1}(x)$, se tendrá que $T^n(x) = T(y) \in T(X)$)

□

Definicion 37 Se dice que (X, T) es uniformemente rígido si para la sucesión $\{\|T^n - id\|_\infty\}_{n \in \mathbb{N}}$ el 0 es un punto de acumulación

Teorema 10 Sea (X, T) transitivo y casi-equicontinuo, entonces:

1. $\overline{orb(x)} = X \Leftrightarrow x$ es equicontinuo
2. (X, T) es uniformemente rígido
3. T es homeomorfismo

Demostración:

1. (a) $\boxed{\Rightarrow}$ Sea $x \in X$, tal que $\overline{orb(x)} = X$ y sea un $\epsilon > 0$ cualquiera. Como $orb(x)$ es denso y ξ_ϵ es abierto, se tiene que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(x) \in \xi_\epsilon$.

Por otro lado, como $T^{-n}(\xi_\epsilon) \subseteq \xi_\epsilon$, necesariamente $x \in \xi_\epsilon$. Así, como esto ocurre $\forall \epsilon$, se tiene que $x \in \xi$, y entonces x es equicontinuo

- (b) $\boxed{\Leftarrow}$ Por contradicción, sea $x \in \xi$ tal que $\overline{orb(x)} \neq X$. Notemos que $U = (\overline{orb(x)})^c$ es un abierto no vacío, luego, tomando $z \in U$, notamos que existe un $\epsilon > 0$, tal que $B_\epsilon(z) \subseteq U$ (por ser U abierto).

Consideremos la bola $B_{\frac{\epsilon}{2}}(z)$.

Como x es equicontinuo, $\exists \delta > 0$, $\forall y \in B_\delta(x)$, $d(T^n(x), T^n(y)) < \frac{\epsilon}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, como T es transitivo, sabemos que existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $B_\delta(x) \cap T^{-n}(B_{\frac{\epsilon}{2}}(z)) \neq \emptyset$

Sea y en tal intersección:

- i. Como $y \in B_\delta(x)$, se tiene que $d(T^n(y), T^n(x)) < \frac{\epsilon}{2}$.
- ii. Como $y \in T^{-n}(B_{\frac{\epsilon}{2}}(z))$, se tiene que $d(T^n(y), z) < \frac{\epsilon}{2}$.

Deducimos entonces que $d(T^n(x), z) \leq d(T^n(x), T^n(y)) + d(T^n(y), z) < \epsilon$, lo que quiere decir que $T^n(x) \in B_\epsilon(z) \subseteq (\overline{orb(x)})^c$ (contradicción).

■

2. Sea $\epsilon > 0$ cualquiera, y $x \in X$ equicontinuo. Como x es equicontinuo, existe un $\delta > 0$ tal que

$$\forall y \in B_\delta(x), \quad d(T^n(y), T^n(x)) \leq \frac{\epsilon}{6}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $B_\delta(x) - \{x\}$ es abierto, y $\overline{orb(x)} = X$ (por la parte anterior), existe un $N > 0$ tal que $T^N(x) \in B_\delta(x)$, luego, $d(T^{N+m}(x), T^m(x)) \leq \frac{\epsilon}{3}$, $\forall m \in \mathbb{N}$.

Como T es continua, T^N es continua, luego, $\exists \delta_2 > 0$, $\delta_2 < \frac{\epsilon}{3}$ tal que

$$\forall y \in B_{\delta_2}(z), d(T^N(z), T^N(y)) \leq \frac{\epsilon}{3}$$

Por otro lado, como $\overline{orb}(x) = X$, existe un $m > 0$, tal que $T^m(x) \in B_{\delta_2}(z)$, con lo que:

$$d(z, T^N(z)) \leq d(z, T^m(x)) + d(T^m(x), T^{m+N}(x)) + d(T^{m+N}(x), T^N(z)) \leq \epsilon$$

Como lo anterior se cumple para todo $z \in X$, entonces

$$\forall \epsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, d(T^n(z), z) \leq \epsilon, \forall z \in X$$

Que es lo que queriamos probar

■

3. Veamos que T es un homeomorfismo.

Como sabemos que T es sobreyectiva y continua, debemos probar que es:

- (a) **Inyectiva:** Sean $x, y \in X$, $x \neq y$. Como son distintos, existe un $\epsilon > 0$, tal que $d(x, y) = \epsilon$.
Supongamos que $T(x) = T(y)$.

Por la parte anterior, existe un $n \in \mathbb{N}$, tal que

$$d(z, T^n(z)) \leq \frac{\epsilon}{3}, \forall z \in X$$

En tal caso, $d(x, y) \leq d(x, T^n(x)) + d(T^n(x), T^n(y)) + d(T^n(y), y) \leq \frac{2}{3}\epsilon < \epsilon$, lo que no puede ser.

- (b) **De inversa continua:** Sea $\epsilon > 0$. Ya que T es uniformemente rígido, existe n , tal que

$$\forall z \in X, d(T^{n+1}(z), z) \leq \frac{\epsilon}{3}$$

Por otro lado, como T es continua, T^n es continua, luego, sabemos que existe $\delta > 0$, tal que

$$\forall y \in B_\delta(x), d(T^n(x), T^n(y)) \leq \frac{\epsilon}{3}$$

Así, como $T^n(x) = T^{n+1}(T^{-1}(x))$, se tendrá que para cualquier $y \in B_\delta(x)$:

$$d(T^{-1}(x), T^{-1}(y)) \leq d(T^{-1}(x), T^n(x)) + d(T^n(x), T^n(y)) + d(T^n(y), T^{-1}(y)) \leq \epsilon$$

Es decir, T^{-1} es continua

■

Aplicaciones en Autómatas celulares

Recordemos que un autómata celular en $Q^{\mathbb{Z}}$ (o \mathbb{N}) es, en particular, un sistema dinámico. Veremos que, en realidad, tales autómatas celulares tienen comportamientos más bien determinados.

Proposición 16 *Sea $(Q^{\mathbb{Z}}, F)$ un autómata celular transitivo, entonces es sensible a las condiciones iniciales. (También se cumple para $N = \mathbb{N}$)*

Demostración:

Del capítulo anterior, como F es transitivo; o es sensible, o es casi-equicontínuo. Supongamos que el autómata es casi-equicontínuo.

Como F es transitivo y casi-equicontínuo, es uniformemente rígido, luego, sabemos que existe un $n > 0$, tal que

$$\forall x \in Q^{\mathbb{Z}}, d(x, F^n(x)) \leq \epsilon$$

En particular, se tiene que $F^n(x)_0 = x_0$, y como esto se cumple para todo x , se cumplirá para $\sigma^l(x)$:

$$F^n(x)_l = (\sigma^l(F^n(x)))_0 = (F^n(\sigma^l(x)))_0 = (\sigma^l(x))_0 = x_l$$

Luego, como esto se cumple $\forall l \in \mathbb{Z}$, se debe tener que $F^n(x) = x$ (y esto para todo x).

En particular se cumple para algún x equicontínuo, por lo que:

$$\overline{orb}(x) = \{x, F(x), \dots, F^{n-1}(x)\} = Q^{\mathbb{Z}}$$

Lo que indica que $Q^{\mathbb{Z}}$ es finito, lo que no puede ser.

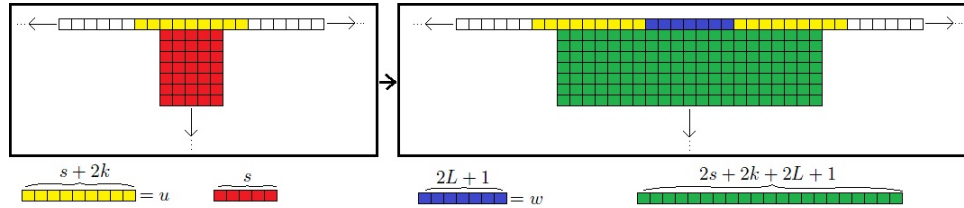
□

Proposición 17 Sea $(Q^{\mathbb{Z}}, F)$ un autómata celular y r el radio de su regla local (el caso $Q^{\mathbb{N}}$ es análogo).

Sea w una palabra de largo $2L + 1$, y u una palabra bloqueadora de largo $t := s + 2k$, que determina un bloque de ancho s , con $s \geq r$.

En tal caso, uwu es bloqueadora, y el bloque que determina es de ancho $2s + 2k + 2L + 1$

Ilustremos un poco esta proposición:



Sea $x \in [uwu]_{-s-2k-L}$. Debemos mostrar que $\forall n \in \mathbb{N}$, $F^n(x)_{[-s-k-L, s+k+L]}$ está determinado.

Demostremos esto por inducción sobre n :

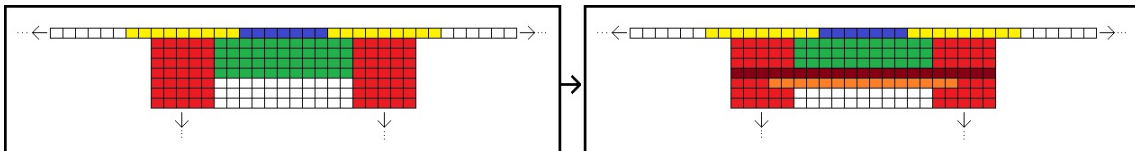
1. **Caso $n = 0$** : Notemos que este caso es trivial, pues conocemos x entre las coordenadas $-s - 2k - L$ y $s + 2k + L$, luego, en particular, lo conocemos entre $-s - k - L$ y $s + k + L$.
2. **Caso $n + 1$** : Supongamos cierta la hipótesis para n . Esto quiere decir que conocemos $F^n(x)$ entre las coordenadas $-s - k - L$ y $s + k + L$.

Como el radio de la regla local es r , conocemos $F^{n+1}(x)$ entre las coordenadas $-s - k - L + r$ y $s + k + L - r$. En particular, como $s \geq r$, conocemos $F^{n+1}(x)$ entre $-k - L$ y $k + L$.

Notando que u es palabra bloqueadora, ésta induce un bloque de ancho s , luego, debido a la posición en la que se encuentra u (a la izquierda), conocemos $F^{n+1}(x)$ entre $-s - k - L$ y $-k - L$.

De la misma forma, podemos argumentar que conocemos $F^{n+1}(x)$ entre $k + L$ y $k + L + s$, con lo que concluimos que conocemos $F^{n+1}(x)$ entre $-s - k - L$ y $s + k + L$.

□



Teorema 11 Sea $(Q^{\mathbb{Z}}, F)$ un autómata celular finito (se tiene el mismo resultado en $Q^{\mathbb{N}}$), entonces

$$F \text{ no es sensible a las condiciones iniciales} \Leftrightarrow F \text{ es casi-equicontinuo}$$

Demostración:

1. $\boxed{\Leftarrow}$ Sabemos que el autómata es casi-equicontinuo, luego, $\xi = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \xi_{\frac{1}{n}}$.

Si el sistema fuese sensible a las condiciones iniciales, existiría $\epsilon > 0$, tal que

$$\forall x \in Q^{\mathbb{Z}}, \forall \delta > 0, \exists y \in B_{\delta}(x), \exists n \in \mathbb{N}, d(F^n(x), F^n(y)) \geq \epsilon$$

En tal caso, podríamos tomar $n \in \mathbb{N}$, tal que $\frac{1}{n} < \epsilon$. Como $\xi_{\frac{1}{n}}$ es no vacío, existiría un x en este conjunto, luego, x no cumpliría la propiedad anterior (por la definición de $\xi_{\frac{1}{n}}$), lo que no puede ser.

2. $\boxed{\Rightarrow}$ La negación de la sensibilidad de F nos indica que

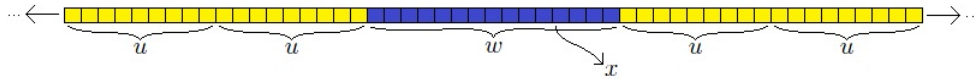
$$\forall \epsilon > 0, \exists x \in Q^{\mathbb{Z}}, \exists \delta > 0, \forall y \in B_{\delta}(x), \forall l \in \mathbb{N}, d(F^l(x), F^l(y)) < \epsilon$$

Esto podemos caracterizarlo, como:

$$\forall m \in \mathbb{N}, \exists x \in Q^{\mathbb{Z}}, \exists n \in \mathbb{N}, y|_{[-n, n]} = x|_{[-n, n]} \Rightarrow F^l(x)|_{[-m, m]} = F^l(y)|_{[-m, m]}, \forall l \in \mathbb{N}$$

De esta forma, considerando un $m > r$ fijo (donde r es el radio de la regla local), obtenemos una palabra $u \in Q^{2n+1}$, definida como $u = x|_{[-n, n]}$ y que es bloqueadora.

Sea ahora una palabra w de largo $2L + 1$. Consideremos $x \in Q^{\mathbb{Z}}$, que resulta de centrar w en la coordenada 0, y adjuntar la palabra u infinitas veces tanto a la derecha como a la izquierda de w .



Veamos que x es equicontinuo:

En efecto, sea $s \in \mathbb{N}$, tomemos un k en \mathbb{N} tal que $s \leq L + k(2n + 1)$, y definamos la palabra w como x entre las coordenadas $-L - k(2n + 1)$ y $L + k(2n + 1)$. Como u es palabra bloqueadora, por la proposición anterior, uwu es bloqueadora, y el bloque que induce es más ancho que w .

Si llamamos p a $L + (k + 1)(2n + 1)$ y t a $L + k(2n + 1)$ (recordemos que $s \leq t$), tendremos:

$$\forall y \in Q^{\mathbb{Z}}, y|_{[-p, p]} = x|_{[-p, p]} = uwu, F^n(x)|_{[-t, t]} = F^n(y)|_{[-t, t]}, \forall n \in \mathbb{N}$$

En particular se tiene:

$$\forall y \in Q^{\mathbb{Z}}, y_{[-p,p]} = x_{[-p,p]} = u w u, \quad F^n(x)_{[-s,s]} = F^n(y)_{[-s,s]}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Luego, como s es cualquiera, x es equicontinuo.

Definamos ahora Φ_L el conjunto de todos los x definidos de la manera anterior, a partir de palabras de largo $2L + 1$ (Notemos que todos los puntos de Φ_L son equicontinuos). Podemos entonces definir $\Phi := \bigcup_{L \in \mathbb{N}} \Phi_L$, que es un conjunto de puntos equicontinuos

Sea $y \in Q^{\mathbb{Z}}$ un punto cualquiera, y $m \in \mathbb{N}$ cualquiera.

Tomemos $w := y|_{[-m,m]}$ y escojamos el x resultante de centrar w en cero, y adjuntar u infinitas veces a la derecha y a la izquierda.

Es claro que $x \in \Phi$, y que se tiene $x_{[-m,m]} = y_{[-m,m]}$. Podemos traducir esto en que, para una distancia cualquiera, hemos podido encontrar un punto Φ que esté suficientemente cerca de y , con lo que concluimos que Φ es denso (pues y es arbitrario).

Hemos encontrado así un conjunto denso de puntos equicontinuos, por lo que se concluye que F es casi-equicontinuo

■

Autómatas cerrados

Definición 38 *Un autómata celular, $(Q^{\mathbb{Z}}, F)$ se dirá cerrado a la derecha ssi existe un $n \in \mathbb{Z}$, tal que $\forall x, y \in Q^{\mathbb{Z}}, x \neq y, x|_{[-\infty, n]} = y|_{[-\infty, n]} \Rightarrow F(x) \neq F(y)$. Se define ser cerrado a la izquierda de forma análoga.*

Consideremos el conjunto \mathcal{B}_x , tal que todos sus elementos son iguales a x desde la coordenada n hacia atrás. F será entonces cerrado a la derecha si es inyectivo al restringirlo a cada \mathcal{B}_x .

Definición 39 *Un autómata celular, $(Q^{\mathbb{Z}}, F)$ se dirá cerrado si es cerrado a la derecha o a la izquierda*

Definición 40 *Se define un diamante como una palabra w de largo al menos $2r$ (con r el radio de la regla local), para la cual existen dos palabras u y v de igual largo, tales que $f(wuw) = f(wvw)$*

Proposición 18 *Si F no es sobreyectivo, entonces existe un diamante*

Demostración:

Recordemos que en la demostración del teorema 4, llegamos a que

$$F \text{ es sobreyectiva ssi } |Q|^{2r} = |f^{-1}(z)| \quad \forall z \in Q^+$$

En este caso, F no es sobreyectiva, luego, necesariamente existe un z' tal que $|f^{-1}(z')| \neq |Q|^{2r}$.

Supongamos z' de largo l . Tomemos todas las palabras de largo l , y supongamos que cada una de ellas es menor o igual a $|Q|^{2r}$ (en particular, $|f^{-1}(z')| < |Q|^{2r}$), entonces:

$$|Q^{2r+l}| = |f^{-1}(Q^l)| = |f^{-1}\left(\bigcup_{z \in Q^l} \{z\}\right)| = \sum_{z \in Q^l} |f^{-1}(z)| < \sum_{z \in Q^l} |Q|^{2r} = |Q|^{2r+l}$$

Lo que no puede ser, luego, existe un z de largo l tal que $|f^{-1}(z)| > |Q|^{2r}$

Sea $w \in f^{-1}(z)$. Es claro que el largo de w es igual al largo de z más $2r$.

Definamos para cada m los siguientes conjuntos:

1. $M_m := \{ww_0w_1 \dots w_{m-1}w, w_i \in f^{-1}(z) \forall i\}$
2. $N_m := \{zv_0zv_1z \dots zv_mz, v_i \in Q^{2r} \forall i\}$

Notemos que $|M_m| = |f^{-1}(z)|^m$ y que $|N_m| = |Q|^{2r(m+1)}$. Además, se tiene que $f(M_m) \subseteq N_m$

Como $|f^{-1}(z)| > |Q|^{2r}$, para un m suficientemente grande, obtenemos la desigualdad $|f^{-1}(z)|^m > |Q|^{2r(m+1)}$, es decir, $|M_m| > |N_m| > |f(M_m)|$.

Como $|M_m| > |f(M_m)|$, se deduce que f no puede ser biyectiva, luego, existen $u', v' \in M_m$, con $u' \neq v'$, tal que $f(u') = f(v')$, pero esto quiere decir que existen u y v distintos y de igual largo, tales que $f(uwu) = f(vvv)$

□

Lema 4 *Si F es cerrado, entonces es sobreyectivo*

Demostración:

Por contrarrecíproca, si F no es sobreyectivo existe un diamante w .

Sean u y v dos palabras distintas de igual largo tales que $f(uwu) = f(vvv)$.

Tomemos x anexando w infinitas veces a la izquierda y a la derecha de u , y tomemos y anexando w infinitas

veces a la izquierda y a la derecha de v .

Es claro que $F(x) = F(y)$ a pesar de que x e y son iguales desde alguna coordenada en adelante, e iguales desde alguna coordenada hacia atrás, luego, concluimos que F no puede ser cerrado

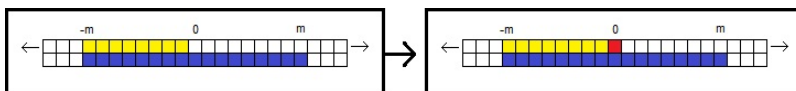
□

Lema 5 F es cerrado a la derecha ssi

$$\exists m > 0, \forall x, y, (x|_{[-m, -1]} = y|_{[-m, -1]} \wedge F(x)|_{[-m, m]} = F(y)|_{[-m, m]}) \Rightarrow x|_0 = y|_0$$

(análogamente se tiene el lema para el caso cerrado por la izquierda)

Podemos ilustrar esta idea como:



Demostración:

⇒ Sea $m > 0$, definimos el conjunto X_m como:

$$X_m := \{(x, y) \in (\mathbb{Q}^{\mathbb{Z}})^2, x|_{[-m, -1]} = y|_{[-m, -1]} \wedge F(x)|_{[-m, m]} = F(y)|_{[-m, m]} \wedge x_0 \neq y_0\}$$

Notemos que X_m es cerrado en la topología producto (representando X_m como la intersección de tres conjuntos, uno por cada propiedad, es fácil ver que cada uno es cerrado). Además, se tiene que $X_{m+1} \subseteq X_m$

Supongamos que $\forall m > 0, X_m \neq \emptyset$. Como $\{X_m\}$ es una familia decreciente de cerrados no vacíos, se tiene la propiedad de la intersección finita, luego, como el espacio es compacto, $X := \bigcap_{m \geq 1} X_m \neq \emptyset$.

Tomemos $(x, y) \in X$, luego, se tiene que

$$x|_{[-\infty, -1]} = y|_{[-\infty, -1]} \wedge F(x) = F(y) \wedge x \neq y$$

Como F es cerrado a la derecha, existe $n \in \mathbb{Z}$, tal que

$$\forall x', y' \in \mathbb{Q}^{\mathbb{Z}}, x' \neq y', x'|_{[-\infty, n]} = y'|_{[-\infty, n]} \Rightarrow F(x') \neq F(y')$$

Tomando $x' = \sigma^{-n+1}(x)$, $y' = \sigma^{-n+1}(y)$ (con x, y los encontrados en X), habremos encontrado un par tal que

$$x'|_{[-\infty, n]} = y'|_{[-\infty, n]} \wedge F(x') = F(y') \wedge x' \neq y'$$

Lo que no puede ser. Concluimos entonces que $\exists m > 0$, $X_m = \emptyset$. Como X_m reúne a todos los elementos que no cumplen la propiedad para un cierto m , se deduce que la propiedad se tiene para todos los elementos.

⊞ Sean x e y , tales que $x|_{[-\infty, -1]} = y|_{[-\infty, -1]} \wedge F(x) = F(y)$

En particular se tendrá que $x|_{[-m, -1]} = y|_{[-m, -1]} \wedge F(x)|_{[-m, m]} = F(y)|_{[-m, m]}$ para el m de la propiedad, luego, $x_0 = y_0$.

Consideramos ahora $\sigma(x)$ y $\sigma(y)$. Es muy sencillo notar que

$$\sigma(x)|_{[-m, -1]} = x|_{[-m+1, 0]} = y|_{[-m+1, 0]} = \sigma(y)|_{[-m, -1]} \text{ (por lo anterior)}$$

$$F(\sigma(x))|_{[-m, m]} = F(x)|_{[-m+1, m+1]} = F(y)|_{[-m+1, m+1]} = F(\sigma(y))|_{[-m, m]}$$

Luego, por la propiedad, $x_1 = \sigma(x)_0 = \sigma(y)_0 = y_1$.

Inductivamente, utilizando el argumento anterior, llegamos a que $x_l = y_l$ para l cualquiera, luego, concluimos que $x = y$, lo que indica que F es cerrado a la derecha (con $n = -1$).

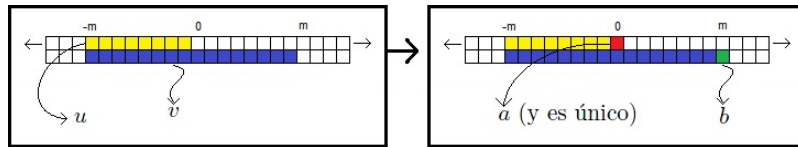
■

El lema que demostraremos a continuación es lo que nos permitirá darle importancia a la propiedad de ser cerrado en autómatas celulares

Lema 6 Sea F un autómata cerrado a la derecha. Si m es suficientemente grande, dados $u \in Q^m$ y $v \in Q^{2m}$, tales que $F([u]_{-m}) \cap [v]_{-m} \neq \emptyset$ se tiene que

$$\forall b \in Q, \exists! a \in Q, F([ua]_{-m}) \cap [vb]_{-m} \neq \emptyset$$

Ilustremos un poco esta idea:



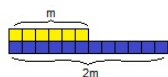
Demostración:

Escojamos m tal que se cumple la propiedad del lema anterior (existe, pues el autómata es cerrado a la derecha).

Definimos $B := \{(u, v) \in Q^m \times Q^{2m}, F([u]_{-m}) \cap [v]_{-m} \neq \emptyset\}$.

Éste es el conjunto de todos los pares de palabras u y v (de largo m y $2m$, respectivamente), tales que existe algún $x \in Q^{\mathbb{Z}}$ que cumple con $x|_{[-m,-1]} = u$ y $F(x)|_{[-m,m-1]} = v$.

A continuación construimos un grafo dirigido G , cuyos vértices $V(G)$ son los elementos de B , es decir, los vértices tienen la forma:



Y los arcos de G son tales que:

Un arco $b_1 b_2$ (con $b_1 = (u, v)$ y $b_2 = (s, t)$), pertenece a G ssi $u|_{[2,m]} = s|_{[1,m-1]}$ y $v|_{[2,2m]} = t|_{[1,2m-1]}$

Es decir:



No es difícil notar que si b_1 es el elemento en B inducido por x , y b_2 es el elemento inducido por $\sigma(x)$, entonces $b_1 b_2 \in G$. Utilizaremos esto para probar que G es conexo:

Sean b_0 y b_f dos elementos cualesquiera en B . Sabemos entonces que existen y y z asociados a tales b_0 y b_f (como en la definición de B).

Sea r el radio de la regla local de F , y consideremos $w_1 = y|_{[-r-m,r+m-1]}$ y $w_2 = z|_{[-r-m,r+m-1]}$.

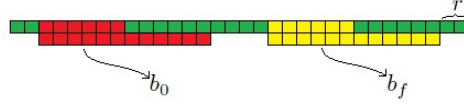
Tomemos un x cualquiera en $[w_1 w_2]|_{-m-r}$. Es claro que $x \in [w_1]_{m-r}$ con lo que

$$x|_{[-m,-1]} = y|_{[-m,-1]} \quad \wedge \quad F(x)|_{[-m,m-1]} = F(y)|_{[-m,m-1]}$$

Es decir, x está asociado a b_0

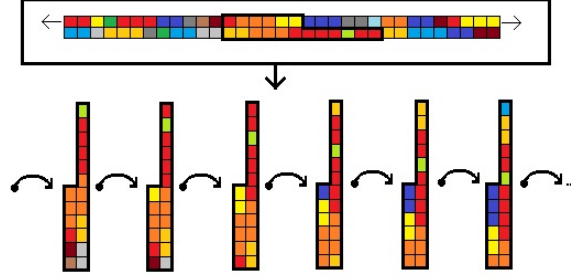
Por otro lado, $\sigma^{2m+2r+1}(x) \in [w_2]_{-m-r}$, por lo que, análogamente al caso anterior, $\sigma^{2m+2r+1}(x)$ está asociado a b_f

Finalmente, podemos tomar la secuencia $x, \sigma(x), \sigma^2(x), \dots, \sigma^{2m+2r+1}(x)$, que está asociada a la secuencia $b_0, b_1, b_2, \dots, b_f$. Por lo visto anteriormente, $b_0 b_1, b_1 b_2, \dots, b_{f-1} b_f \in G$, es decir, hemos encontrado un camino entre b_0 y b_f en G , lo que nos permite concluir que G es conexo.



Consideramos ahora el conjunto $\Sigma \subseteq B^{\mathbb{Z}}$ de los paseos infinitos en el grafo G . Definimos $\Phi : Q^{\mathbb{Z}} \rightarrow \Sigma$, tal que $\Phi(x) = \{(x|_{[i, i+m-1]}, F(x)|_{[i, i+2m-1]})\}_{i \in \mathbb{Z}}$

Visualmente la función Φ tiene esta forma:



Veamos que Φ está bien definido:

1. Sea $x \in Q^{\mathbb{Z}}$, veamos que $\Phi(x)_i \in B$. En efecto, $\Phi(x)_i = (x|_{[i, i+m-1]}, F(x)|_{[i, i+2m-1]}) = (u_i, v_i)$ que son de largo m y $2m$ respectivamente.

Notemos que para $\sigma^{i+m}(x)$, se tiene que

$$(\sigma^{i+m}(x)|_{[-m, -1]}, F(\sigma^{i+m}(x))|_{[-m, m-1]}) = (x|_{[i, i+m-1]}, F(x)|_{[i, i+2m-1]}) = (u_i, v_i)$$

Luego, $(u_i, v_i) \in B$

2. Notemos, por otro lado, que $\Phi(x)_i \Phi(x)_{i+1}$ es un arco de G , pues $u_i|_{[2, m]} = x|_{[i+1, i+m-1]} = u_{i+1}|_{[1, m-1]}$ (para v_i es análogo)

De esta forma, $\Phi(x)$ es, efectivamente, un paseo infinito en el grafo.

No es difícil ver que Φ es biyección, y que conmuta con los shift, luego, se tendrá que $(Q^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ es conjugado con (Σ, σ) .

Sabemos que G es un grafo finito, y que es conexo, luego, por el teorema 8, se tiene que la entropía topológica de (Σ, σ) es el logaritmo del valor propio de Perron de A , donde A es la matriz de incidencia de G .

Por la proposición 13, la entropía topológica de $(Q^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ es $\log(|Q|)$, luego, como $(Q^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ y (Σ, σ) son conjugados, en particular deben tener la misma entropía. Llamando λ al valor propio de Perron de A , se debe tener entonces que $\lambda = |Q|$.

Sea (u, v) un elemento cualquiera de B . Notemos que, dado $b \in Q$, si existe un $a \in Q$, tal que $F([ua]_{-m}) \cap [vb]_{-m} \neq \emptyset$, entonces, por el lema anterior, tal a es único. Para concluir el teorema, debemos mostrar entonces que tal a existe.

Por el mismo argumento anterior, cada elemento $(u, v) \in B$ puede tener a lo más $|Q|$ vecinos (uno por cada letra concatenada a v). Demostrar la existencia consiste entonces, en mostrar que cada elemento de B tiene exactamente $|Q|$ vecinos.

Sea u el único vector propio asociado a λ . Recordemos que tal vector es no negativo. Como u tiene finitas coordenadas, alcanza su máximo $M > 0$ en algún u_i . A un elemento b_i tal que $u_i = M$, lo llamaremos maximal.

Notemos que cada elemento en B tiene a lo más $|Q|$ vecinos, luego, $\sum_{j=1}^{|B|} A_{ij} \leq |Q|$. Por otro lado, como u es vector propio asociado a $\lambda = |Q|$, se tiene que para b_i maximal:

$$|Q|M = \sum_{j=1}^{|B|} A_{ij}u_j \leq \sum_{j=1}^{|B|} A_{ij}M \leq |Q|M$$

Como u es no negativo, y los A_{ij} son todos unos y ceros, si alguno de los vecinos de b_i no fuese maximal, la primera desigualdad sería estricta, lo que no puede ser. Por otro lado, si b_i tuviese menos de $|Q|$ vecinos, la segunda desigualdad sería estricta, lo que tampoco es posible. Podemos concluir entonces, que si b_i es un elemento maximal, entonces tiene $|Q|$ vecinos, y son todos maximales.

Hemos probado entonces que ser maximal es una propiedad de clase, y como el grafo es conexo, todos sus elementos son maximales. En particular, cada uno de ellos tiene exactamente $|Q|$ vecinos. Como cada elemento en B , tiene a lo más un vecino por cada letra en Q , concluimos que debe tener exactamente un vecino por cada letra en Q , con lo que se concluye el lema. ■

Observacion 5 *El lema anterior, se puede generalizar cuando F es cerrado tanto a la derecha como a la izquierda de la siguiente forma:*

Si u es de largo al menos $2m + 1$ y v es de largo al menos $4m + 1$, tales que $F([u]_{-m}) \cap [v]_{-2m} \neq \emptyset$, entonces para cualquier par de elementos $b_1, b_2 \in Q$, existen únicos a_1, a_2 , tales que $F([a_1ua_2]_{-m-1}) \cap [b_1vb_2]_{-2m-1} \neq \emptyset$

Proposicion 19 *Sea F un autómata celular cerrado a la derecha y a la izquierda y m grande. Si u y v son dos palabras de largo $2m + 1$ y $4m + 1$ respectivamente tales que $F([u]_{-m}) \cap [v]_{-2m} \neq \emptyset$, entonces $[v]_{-2m} \subseteq F([u]_{-m})$*

Demostración:

Definamos primero $V_0 := [v]_{-2m}$ y $U_0 := [u]_{-m}$.

Sea $y \in [v]_{-2m}$. Llamemos b_{-1} a y_{-2m-1} y b_1 a y_{2m+1} . Consideremos $V_1 = [b_{-1}vb_1]_{-2m-1}$.

Por la observación 5, se tiene que existen únicos a_{-1} y a_1 tales que

$$F([a_{-1}ua_1]_{-m-1}) \cap [b_{-1}vb_1]_{-2m-1} \neq \emptyset$$

Llamemos U_1 a $[a_{-1}ua_1]_{-m-1}$.

De la misma forma, llamando b_{-2} a y_{-2m-2} y b_2 a y_{2m+2} , podemos generar

$$V_2 = [b_{-2}b_{-1}vb_1b_2]_{-2m-2} \text{ y } U_2 = [a_{-2}a_{-1}ua_1a_2]_{-m-2}$$

Siguiendo este método, podemos generar el par de familias $\{U_k\}_{k \geq 0}$ y $\{V_k\}_{k \geq 0}$. No es difícil darse cuenta de que $\forall k \geq 0$, $U_{k+1} \subseteq U_k$ y $V_{k+1} \subseteq V_k$.

Tomemos ahora una sucesión $\{x_k\}_{k \geq 0}$, tal que $\forall k \geq 0$, $x_k \in U_k$, $F(x_k) \in V_k$.

Se puede probar fácilmente que $\bigcap_{k \geq 0} V_k = \{y\}$ y que $\bigcap_{k \geq 0} U_k = \{x\}$ para algún x .

Por lo anterior, necesariamente $x_k \rightarrow x$ y $F(x_k) \rightarrow y$, y como F es continua, es claro que $F(x) = y$.

Recordemos que $x \in \bigcap_{k \geq 0} U_k \subseteq U_0 = [u]_{-m}$, luego, $y \in F([u]_{-m})$. Finalmente, como $y \in [v]_{-2m}$ es cualquiera, se concluye que $[v]_{-2m} \subseteq F([u]_{-m})$

□

Proposición 20 *Si F es cerrado a la derecha y a la izquierda, entonces F es una función abierta*

Demostración:

Como los cilindros $[u]_{[-n,n]}$ son una base de vecindades, nos bastará probar que su imagen es abierta. Hay dos casos que son de nuestro interés:

1. Supongamos $n > m$ para m como en la proposición anterior, como $\bigcup_{v \in Q^{4n+1}} [v]_{-2n} = Q^{\mathbb{Z}}$

se debe cumplir:

$$F([u]_{[-n,n]}) = \bigcup_{v \in Q^{4n+1}} (F([u]_{[-n,n]}) \cap [v]_{-2n})$$

Por la proposición anterior, hay dos casos posibles:

$$F([u]_{[-n,n]}) \cap [v]_{-2n} = \emptyset \quad \text{y} \quad [v]_{-2n} \subseteq F([u]_{[-n,n]})$$

Llamando Γ al conjunto de los v tales que se cumple lo último, tendremos lo siguiente:

$$F([u]_{[-n,n]}) = \left(\bigcup_{v \in \Gamma} (F([u]_{[-n,n]}) \cap [v]_{-2n}) \cup \bigcup_{v \in \Gamma^c} \emptyset \right) = \bigcup_{v \in \Gamma} [v]_{-2n}$$

Luego, $F([u]_{[-n,n]})$ es unión de abiertos, por lo que es abierto.

2. Si $n \leq m$, se tiene que $[u]_{[-n,n]}$ se puede escribir como unión de cilindros de largo al menos $m + 1$, luego, $F([u]_{[-n,n]}) = \bigcup F([v]_{[-m-1,m+1]})$ que ya vimos que son abiertos.

Podemos concluir entonces que F es una función abierta

□

Notemos que, entonces, nuestro interés sobre los autómatas cerrados a la izquierda y a la derecha, radica en que F es una función abierta, lo que nos ayudará a entender tales autómatas.

Resultados para F positivamente expansivo

Lema 7 Sea $(Q^{\mathbb{Z}}, F)$ autómata celular positivamente expansivo, entonces es cerrado a la derecha e izquierda

Demostración:

Veamos que F es cerrado a la derecha. En efecto, consideremos $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall x, y \in Q^{\mathbb{Z}}, (F(x)^n|_{[-N, N]} = F(y)^n|_{[-N, N]}, \forall n \in \mathbb{N}) \Rightarrow x = y$$

Tomemos entonces x e y tales que $F(x) = F(y)$ y $x|_{[-\infty, N]} = y|_{[-\infty, N]}$.

En particular, para tales x e y , se tiene que $F^n(x) = F^n(y)$, y, más específicamente,

$$F(x)^n|_{[-N, N]} = F(y)^n|_{[-N, N]}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Se sigue que $x = y$, y se tiene que es cerrado por la derecha (por la izquierda es análogo)

□

Teorema 12 Sea B un conjunto finito. Todo subshift (S, σ) , en que $S \subseteq B^{\mathbb{N}}$, y tal que σ es una función abierta, es un subshift de tipo finito

Teorema 13 Si $(Q^{\mathbb{Z}}, F)$ es positivamente expansivo, entonces (S_F, σ) es un subshift de tipo finito

Demostración

Como $(Q^{\mathbb{Z}}, F)$ es positivamente expansivo, entonces es cerrado a la derecha y a la izquierda, y, por la proposición 20, sabemos que es abierta.

Se tiene que $(Q^{\mathbb{Z}}, F)$ es conjugado con (S_F, σ) , luego, necesariamente σ es abierta, y entonces, por el teorema anterior, (S_F, σ) es un subshift de tipo finito.

■

De esta forma, sabemos que el subshift vertical es un subshift de tipo finito. En particular nos interesa la siguiente propiedad

Observacion 6 Sea S un subshift de tipo finito para algún alfabeto B . Existe un $N > 0$ tal que, para toda palabra v , de largo al menos N , y para todo par de palabras u y w , se tiene que si uv y vw están permitidas, entonces uvw está permitida. Es importante notar que el resultado también se tiene cuando vw es un elemento de S

Todos los teoremas y resultados obtenidos hasta el momento para $N = \mathbb{Z}$, se pueden obtener de forma análoga para $N = \mathbb{N}$.

Teorema 14 *Si $(Q^{\mathbb{N}}, F)$ es positivamente expansivo, entonces es mezclador.*

El resultado también se tiene para $Q^{\mathbb{Z}}$

Antes de poder demostrar el resultado, recordemos que la función Ψ , a través de la cual F es conjugado con S_F , es bicontinua, es decir, se tiene:

Proposición 21 *Sea $(Q^{\mathbb{N}}, F)$ un autómata celular positivamente expansivo, y sea S_F el subshift al que es conjugado a través de la función Ψ . Entonces, para toda palabra $u \in Q^+$, existe una palabra w en $(Q^{r+1})^+$, tal que $\Psi([w]_0 \cap S_F) \subseteq [u]_0$*

Demostremos esto:

Sea x un elemento cualquiera de $[u]_0$, y llamemos $z = \Psi^{-1}(x)$. Llamemos además w_m a $z|_{[0, m]}$ para cada m .

Definimos $D_m = \{y \in Q^{\mathbb{N}}, y \notin [u]_0 \wedge \Psi(y) \in [w_m]_0\} = ([u]_0)^c \cap \Psi^{-1}([w_m]_0 \cap S_F)$

Notemos que los D_m son cerrados, y son decrecientes. En caso de que $\forall m \in \mathbb{N}$, se tuviera $D_m \neq \emptyset$, entonces la familia $\{D_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ sería una colección de cerrados con la propiedad de la intersección finita, luego, $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} D_m \neq \emptyset$. Tomando y en esta intersección, se tiene que $\Psi^{-1}(y) = z$, pero $y \neq x$, pues $y \notin [u]_0$. Esto es una contradicción, pues z tendría dos imágenes a través de Ψ .

Se concluye que existe un m tal que $D_m = \emptyset$, es decir $\Psi([w_m]_0 \cap S_F) \subseteq [u]_0$

□

Estamos ahora en condiciones de demostrar el teorema:

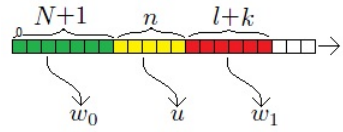
Por comodidad, demostraremos el caso $r = 1$. Para el caso $r > 1$, la demostración es análoga.

Sean U y V dos abiertos cualesquiera en $Q^{\mathbb{N}}$. Como los cilindros de la forma $[w]_0$ son una base de abiertos, podemos suponer que $U = [u]_0$ y $V = [v]_0$. Llamemos n al largo de u y m al largo de v .

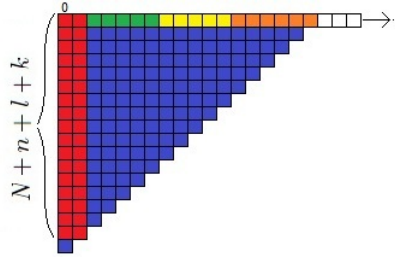
Recordemos que como F es positivamente expansiva, S_F es un subshift de tipo finito, y existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que se cumple la proposición 6. Consideremos entonces $w_0 \in Q^+$ una palabra de largo $N + 1$

Por la proposición 21, existe una palabra s_1 tal que $\Psi([s_1]_0) \subseteq [w_0 u]_0$. Supongamos que tal palabra es de largo l . Tomemos ahora un elemento cualquiera p en $[s_1]_0$, y tomemos $y = \Psi(p)$.

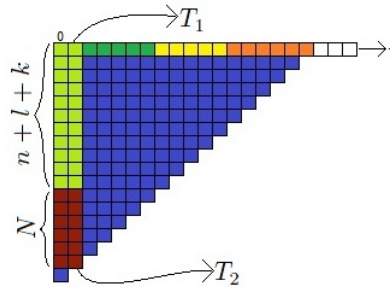
Es claro que $y \in [w_0u]_0$. Llamemos w_0uw_1 a la palabra formada por las primeras $N + 1 + n + l + k$ coordenadas, en que k es un número natural cualquiera.



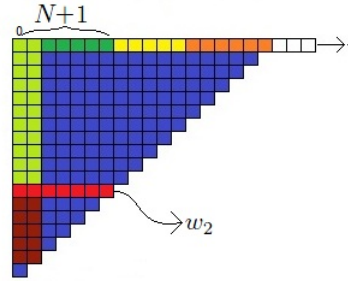
Como $r = 1$, las primeras $N + 1 + n + l + k$ coordenadas de y (es decir, w_0uw_1) determinan las primeras $N + n + l + k$ coordenadas de $\Psi^{-1}(y)$



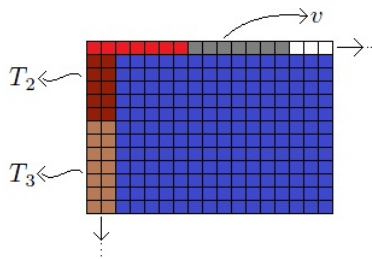
Llamemos T_1T_2 a la palabra formada por tales coordenadas de $\Psi^{-1}(y)$, donde T_1 es de largo $n + l + k$ y T_2 es de largo N :



Sea w_2 la palabra formada por las primeras $N + 1$ coordenadas de $F^{n+l+k}(y)$. Notemos que, como las primeras $N + 1 + n + l + k$ coordenadas de y inducen T_1T_2 , entonces las primeras $N + 1$ coordenadas de $F^{n+l+k}(y)$ inducen T_2 .



Sea ahora $[w_2v]_0 \subseteq Q^{\mathbb{N}}$, y tomemos z cualquiera en tal cilindro. Como en particular, $z \in [w_2]_0$, se tendrá que las primeras $N + 1$ coordenadas de $\Psi^{-1}(z)$ forman T_2 . Así, podemos llamar T_2T_3 a $\Psi^{-1}(z)$:

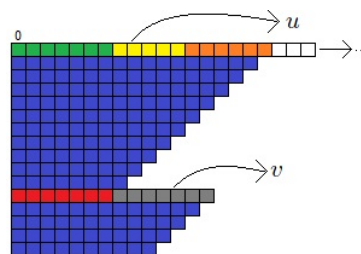


Notemos que T_1T_2 es una palabra permitida en S_F , y T_2T_3 es un elemento de S_F (luego, está permitido). Como T_2 es de largo N , entonces, por la observación 6, $T_1T_2T_3$ es un elemento de S_F .

Llamemos x' a $\Psi(T_1T_2T_3)$. Recordemos que la palabra w elegida en un comienzo es tal que $\Psi([w]_0 \cap S_F) \subseteq [w_0u]_0$, es de largo l , por lo que $T_1T_2T_3|_{[0,l-1]} = T_1T_2|_{[0,l-1]} = w$.

De esta forma, $T_1T_2T_3 \in [w]_0$, por lo que $x \in [w_0u]_0$

Por otro lado, $z = \Psi(T_2T_3) = \Psi(\sigma^{n+l+k}(T_1T_2T_3)) = F^{n+l+k}(\Psi(T_1T_2T_3)) = F^{n+l+k}(x')$, lo que quiere decir que $F^{n+l+k}(x') \in [w_2v]_0$



En particular, si tomamos $x := \sigma^{N+1}(x')$, se tendrá que $x \in [u]_0$ y que $F^{n+l+k}(x) \in [v]_0$. Como k es cualquiera, concluimos que

$$\exists M = n + l > 0, \forall m \geq M, \exists x \in [u]_0, F^m(x) \in [v]_0$$

Con lo que concluimos que F es mezclador

■

Esta demostración se puede rehacer para los casos $r > 1$, y se puede realizar una demostración análoga para el caso $N = \mathbb{Z}$