Conjuntos

9 de marzo de 2007

Introducción

La teoría de conjuntos gira en torno a la función proposicional $x \in A$. Los valores que hacen verdadera la función proposicional $x \in A$ son aquellos **elementos** que forman el **conjunto** A.

La función proposicional “$x \in A$” se lee "x pertenece a A". Su negación, que se denota $x \notin A$, se lee “x no pertenece a A”.

Ejemplo

Si queremos que el conjunto A sea el de los números primos menores que 10 entonces tendríamos que definirlo formalmente así:

$$(\forall x)[(x \in A) \iff (x = 2 \vee x = 3 \vee x = 5 \vee x = 7)].$$

Los conjuntos finitos son fáciles de definir. De hecho, acabamos de mostrar cómo se define el conjunto que se se denota por extensión $A = \{2, 3, 5, 7\}$.

La axiomática de la teoría de conjuntos (que aquí no se estudiará) permite asumir la existencia de un conjunto infinito muy importante: el de los naturales $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Introducción: Algunos ejemplos de conjuntos

En matemáticas se construyen nuevos conjuntos a partir de conjuntos ya conocidos. Supongamos que ya conocemos el conjunto A. Podemos introducir, $B = \{x \in A | p(x)\}$. Lo que en el fondo estamos definiendo es la función proposicional $x \in B$ así:

$$(\forall x)[(x \in B) \iff (x \in A \wedge p(x))]$$

Por ejemplo, el conjunto de múltiplos de 7 es el conjunto $\{x \in \mathbb{N} | (\frac{x}{7}) \in \mathbb{N}\}$.

Otros ejemplos de conjuntos, con los cuales el lector ya debe estar familiarizado:

Ejemplos

1. Los reales $\mathbb{R}$.
2. Los enteros $\mathbb{Z}$.
3. Los racionales $\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} \mid (\exists p)(\exists q)(p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{Z} \wedge \ q \neq 0 \wedge x = \frac{p}{q})\}$.
4. Los irracionales $\mathbb{Q}^c = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin \mathbb{Q}\}$.
5. Los naturales $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
6. Los enteros positivos $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

El conjunto vacío

Definimos ahora el conjunto vacío, el cual notamos ϕ, del siguiente modo:

Conjunto vacío

$$\phi = \{x \in \mathbb{N} | x \neq x\}.$$

Notar que ϕ no tiene ningún elemento. Es decir $(\forall x)(x \notin \phi)$.

En efecto, sea x arbitrario.

$$(x \in \phi) \iff ((x \in \mathbb{N}) \wedge (x \neq x)) \iff ((x \in \mathbb{N}) \wedge F) \iff F$$

Igualdad e inclusión

Sean A y B conjuntos. Definimos la igualdad y la inclusión como sigue.

Igualdad e inclusión

$$\begin{aligned} A = B &\iff (\forall x)(x \in A \iff x \in B) \\ A \subseteq B &\iff (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B) \end{aligned}$$

Una primera propiedad que probaremos es:

Propiedad

Sean A y B conjuntos. Se tiene que:

$$A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

Demostración.

Vamos a usar la identidad lógica ya demostrada anteriormente:
$(\forall x)(p(x) \wedge q(x)) \iff [(\forall x)p(x)) \wedge (\forall x)p(x)]$.

$$\begin{aligned} A = B &\iff (\forall x)(x \in A \iff x \in B) \\ &\iff (\forall x)[(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A)] \\ &\iff (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (\forall x)(x \in B \Rightarrow x \in A) \\ &\iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A \end{aligned}$$

$\square$

Igualdad e inclusión

Otras propiedades importantes:

Propiedades

Sean A, B, C conjuntos arbitrarios. Se tiene:

1. $A = A$
2. $A = B \iff B = A$
3. $(A = B \wedge B = C) \Rightarrow A = C$
4. $A \subseteq A$
5. $(A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \Rightarrow A = B$
6. $(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$
7. $\phi \subseteq A$

Demostración.

Demostraremos sólo la propiedad 6.
Hipótesis:
(a) $(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$
(b) $(\forall x)(x \in B \Rightarrow x \in C)$
p.d.q: $(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in C)$

En efecto: Sea x arbitrario. Asumamos que $x \in A$. Por (a) se tiene que $x \in B$. Por (b) se tiene que $x \in C$. $\square$

Unión de conjuntos

Operando conjuntos conocidos se pueden definir nuevos conjuntos.Sean A y B conjuntos.

La unión de A con B, que se denota $A \cup B$, es el conjunto que reúne a los elementos que están en A con aquellos que están en B. Formalmente:

Unión

$$(\forall x)[(x \in A \cup B) \iff (x \in A \vee x \in B)]$$

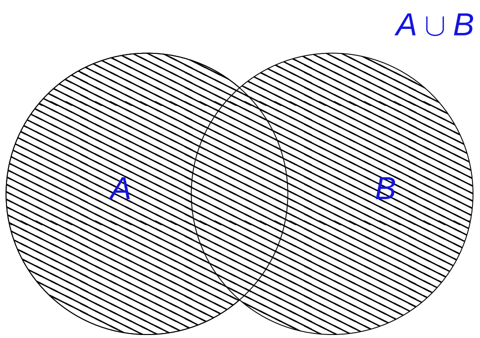

Figura: Diagrama de Venn, representando la unión entre A y B (área achurada).

Paréntesis Importante: Diagramas de Venn

Un *Diagrama de Venn*, como el presentado en la diapositiva anterior, es una ilustración que muestra la relación matemática o lógica entre conjuntos.

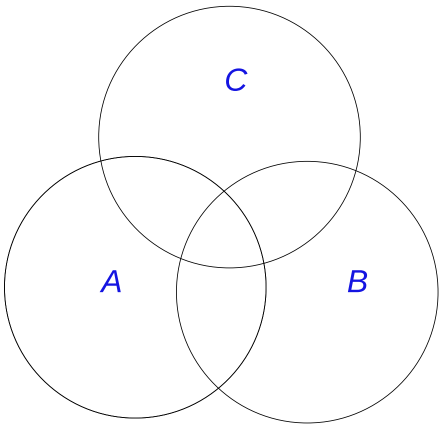

Figura: Diagrama de Venn para tres conjuntos.

Fueron introducidos por el filósofo y matemático británico John Venn (1834-1923) el año 1881.

Los diagramas de Venn cumplen el rol de ayudarnos a desarrollar una intuición frente al concepto de conjunto y a las relaciones entre estos.

Sin embargo **no** podemos usarlos para demostrar propiedades, ni para sacar conclusiones generales (que se apliquen a todo conjunto).

Intersección de conjuntos

La intersección de A con B, que se denota $A \cap B$, es el conjunto formado por los elementos que están tanto en A como en B. Formalmente:

Intersección

$$(\forall x)[(x \in A \cap B) \iff (x \in A \land x \in B)]$$

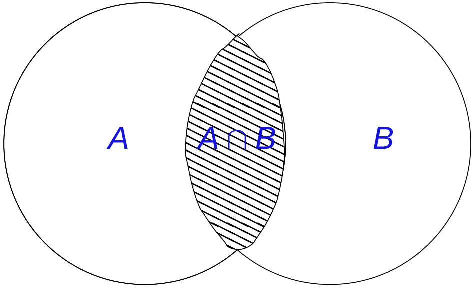

Figura: Diagrama de Venn, representando la intersección entre A y B (área achurada).

Unión e intersección

Una primera propiedad:

Propiedad

Sean A, B conjuntos tales que $A \subseteq B$. Entonces $A \cup B = B$ y $A \cap B = A$.

Demostración.

Probaremos sólo la primera.
$\subseteq$)
Sea x arbitrario tal que $x \in A \cup B$. Es decir,
Hipótesis: $x \in A \vee x \in B$.
p.d.q: $x \in B$
En efecto:
Caso 1. $x \in A$. Como $A \subseteq B$ se tiene que $x \in B$.
Caso 2. $x \notin A$. Por hipótesis se tiene que tener $x \in B$.
$\supseteq$)
Sea x arbitrario tal que $x \in B$. Obviamente $x \in A \cup B$. $\square$

Unión e intersección

Propiedades

Sean A, B, C conjuntos, se tiene:

1. Conmutatividades
   - **1.1** $A \cup B = B \cup A$.
   - **1.2** $A \cap B = B \cap A$.
2. Asociatividades
   - **2.1** $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
   - **2.2** $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
3. Distributividades
   - **3.1** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
   - **3.2** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
4. - **4.1** $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$.
   - **4.2** $A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$.

Demostración.

Notar que las propiedades (1), (2) y (3), son consecuencias directas de las propiedades análogas para $\wedge$ y $\vee$. Queda como ejercicio realizar dichas demostraciones. $\square$

Conjunto universo

Asumiremos la existencia de un universo (conjunto referencia) U en el que viven todos los elementos con los que se va a trabajar. Es decir, U es tal que la proposición $a \in U$ es siempre verdadera.

Con esto, podemos concluir de lo anterior el siguiente:

Corolario

Sean A, B conjuntos y sea U el conjunto universo.

1. $A \cup A = A$
2. $A \cap A = A$
3. $A \cup \phi = A$
4. $A \cap \phi = \phi$
5. $A \cup U = U$
6. $A \cap U = A$

Demostración.

- Como $A \subseteq A$ se tiene que $A \cup A = A$ y que $A \cap A = A$.
- Como $\phi \subseteq A$ se tiene que $\phi \cup A = A$ y que $\phi \cap A = \phi$.
- Como $A \subseteq U$ se tiene que $A \cup U = U$ y que $A \cap U = A$.

$\square$

Importante

El conjunto universo es un conjunto de **referencia**, es decir habrá veces que tomaremos $U = \mathbb{R}$, u otras $U = \mathbb{Z}$, etc.

Diferencia y complemento

Supongamos que tenemos un conjunto de referencia U (conjunto universo). Queremos definir el complemento de un conjunto A, que notaremos A^c, como aquel formado por todos los elementos que no están en A. Formalmente:

Conjunto complemento

$$(\forall x)(x \in A^c \iff x \in U \wedge x \notin A)$$

O sea, $(\forall x)(x \in A^c \iff x \notin A)$.

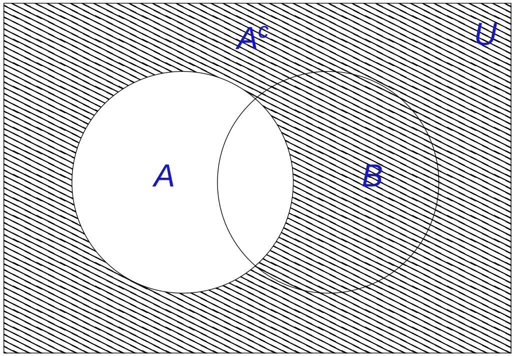

Figura: Diagrama de Venn, representando el complemento de A (área achurada).

Ejemplo

Si viviésemos en el mundo de los números enteros $\mathbb{Z}$ (conjunto universo) entonces consideremos $A = \{x \in \mathbb{Z} | \ x \text{ es par}\}$. Obviamente $A^c = \{x \in \mathbb{Z} | \ x \text{ es impar}\}$.

Diferencia y complemento

Definimos además la diferencia entre A y B, que notamos $A \setminus B$, como el conjunto formado por los elementos que están en A y que no están en B. Formalmente:

Diferencia

$$A \setminus B = A \cap B^c.$$

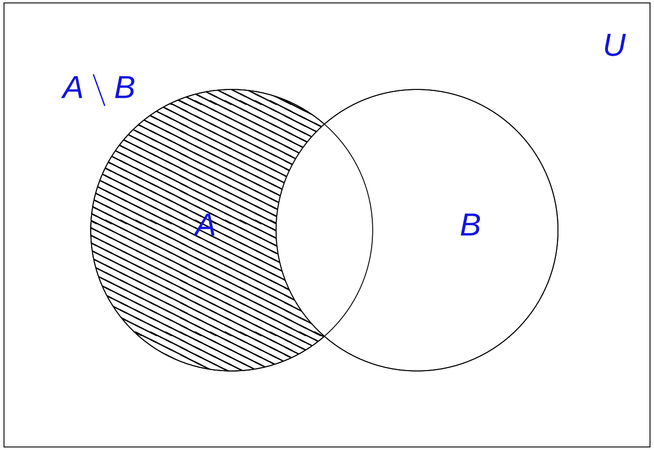

Figura: Diagrama de Venn, representando la diferencia entre A y B (área achurada).

Diferencia y complemento

Algunas propiedades:

Propiedades

Sean A y B conjuntos.

1. Leyes de De Morgan
   1.1. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
   1.2. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
2. $(A \subseteq B) \iff (B^c \subseteq A^c)$
3. $(A^c)^c = A$
4. $A \cup A^c = U$
5. $A \cap A^c = \phi$

Demostración.

Demostraremos la primera. Sea x arbitrario.

$$\begin{aligned}
x \in (A \cup B)^c &\iff \overline{x \in (A \cup B)} \\
&\iff \overline{(x \in A) \vee (x \in B)} \\
&\iff \overline{(x \in A)} \wedge \overline{(x \in B)} \\
&\iff (x \in A^c) \wedge (x \in B^c) \\
&\iff x \in (A^c \cap B^c)
\end{aligned}$$

$\square$

Diferencia simétrica

Un elemento x se dice que pertenece a la *diferencia simétrica* entre A y B, que se denota $A \Delta B$, si y solamente si x está en A pero no en B, o bien en B pero no en A.

Formalmente:

Diferencia simétrica

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

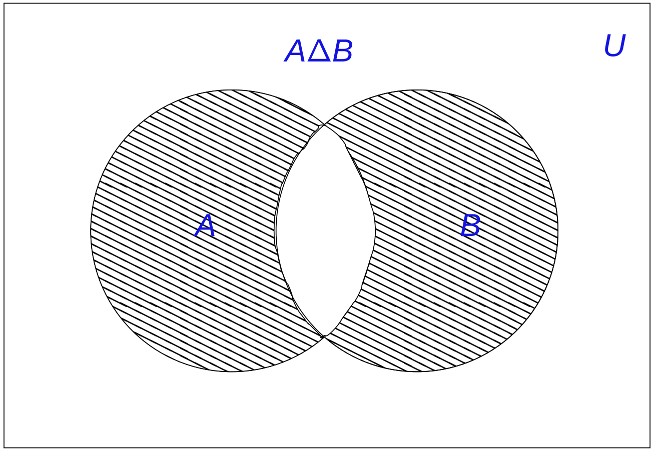

Figura: Diagrama de Venn, representando la diferencia simétrica entre A y B (área achurada).

Diferencia simétrica

Obviamente, algunas propiedades:

Propiedades

Sean A, B, C conjuntos.

1. $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
2. $A \Delta B = B \Delta A$
3. $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$
4. $A \Delta A = \phi$
5. $A \Delta \phi = A$
6. $(A \cap (B \Delta C)) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

Demostración.

Demostraremos la primera.

$$\begin{aligned}
A \Delta B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\
&= (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \\
&= [(A \cap B^c) \cup B] \cap [(A \cap B^c) \cup A^c] \\
&= [(A \cup B) \cap (B^c \cup B)] \cap [(A \cup A^c) \cap (B^c \cup A^c)] \\
&= [(A \cup B) \cap U] \cap [U \cap (B^c \cup A^c)] \\
&= (A \cup B) \cap (B^c \cup A^c) \\
&= (A \cup B) \cap (B \cap A)^c \\
&= (A \cup B) \setminus (A \cap B).
\end{aligned}$$

$\square$

Conjunto potencia

Sea A un conjunto. Llamamos conjunto potencia de A, y notamos $\mathcal{P}(A)$, al conjunto de todos los subconjuntos de A. $\mathcal{P}(A)$ también se conoce como el “conjunto de las partes de A". Formalmente:

Conjunto potencia

$$(\forall X)(X \in \mathcal{P}(A) \iff X \subseteq A)$$

Note que siempre $\phi \in \mathcal{P}(A)$ y $A \in \mathcal{P}(A)$.

Veamos dos ejemplos.

Ejemplos

Suponga que $A = \{1, 2, 3\}$. En $\mathcal{P}(A)$ están todos los subconjuntos de A. O sea,

$$\mathcal{P}(A) = \{\phi, \{1\}, \{2\}\{3\}, \{1, 2\}\{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Suponga ahora que $A = \phi$. ¿Cuáles son los subconjuntos de ϕ?
Solamente el mismo ϕ. Luego $\mathcal{P}(\phi) = \{\phi\}$. Note que $\phi \neq \{\phi\}$ pues el primer conjunto no tiene ningún elemento mientras que el segundo tiene un elemento. En efecto: $\phi \in \{\phi\}$.

Calculemos ahora $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\phi)) = \mathcal{P}(\{\phi\})$.
Obviamente, un conjunto de un solo elemento tiene solamente como subconjuntos los triviales: al vacío y a él mismo. O sea $\mathcal{P}(\{\phi\}) = \{\phi, \{\phi\}\}$. El lector debe ser capaz ahora de calcular $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\phi)))$. Note que este proceso puede no detenerse nunca. ¡Y lo que estamos generando es una infinidad de conjuntos!

★Ejemplo importante: Transitividad

A continuación veremos otra técnica de demostración. Supongamos que queremos demostrar que $p \Rightarrow r$. Lo que hacemos es demostrarlo por pasos.

Primero demostramos $p \Rightarrow q_1$. Después $q_1 \Rightarrow q_2$. Después $q_2 \Rightarrow q_3$. Seguimos así hasta que finalmente demostremos $q_n \Rightarrow r$.

Podemos concluir que $p \Rightarrow r$ usando implícitamente la Tautología 2

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

Apliquemos esta técnica para demostrar que para A, B, C conjuntos cualesquiera se tiene:

$$(A\Delta B = A\Delta C) \Rightarrow B = C$$

En efecto,

$$\begin{aligned} A\Delta B = A\Delta C &\Rightarrow A\Delta(A\Delta B) = A\Delta(A\Delta C) \\ &\Rightarrow (A\Delta A)\Delta B = (A\Delta A)\Delta C \\ &\Rightarrow \phi\Delta B = \phi\Delta C \\ &\Rightarrow B = C. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Pares ordenados

Notemos que los conjuntos $\{a, b\}$ y $\{b, a\}$ son idénticos. En efecto, ambos contienen a los mismos elementos. Quisiéramos introducir un objeto que distinga el orden de los elementos.

La solución no es muy difícil. Basta con definir los **pares ordenados** así: $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$. La propiedad fundamental de los pares ordenados es la siguiente.

Propiedad

Para todo a, b, x, y se tiene:

$$(a, b) = (x, y) \iff a = x \land b = y$$

Demostración.

$\Leftarrow)$ Directo.
$\Rightarrow)$
Demostremos primero que $a = x$.
En efecto, como $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ se tiene que $\{a\} \in \{\{x\}, \{x, y\}\}$.
Caso 1: $\{a\} = \{x\}$. Se concluye.
Caso 2: $\{a\} \neq \{x\}$. O sea $\{a\} = \{x, y\}$. En este caso se tiene que tener $a = x = y$.

Demostremos ahora que $b = y$.
En efecto, como ya sabemos que $a = x$ la hipótesis nos dice que $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}, \{a, y\}\}$.
Caso 1: Si $a = b$, luego $\{a\} = \{a, y\}$, de donde $y = a = b$.
Caso 2: Si $a \neq b$, se tendrá que $\{a, b\} = \{a, y\}$. Luego $b \in \{a, y\}$.
Pero como $a \neq b$, luego $b = y$. $\square$

Producto cartesiano

Sean A, B conjuntos. Se define el producto cartesiano de A con B, que se denota $A \times B$, del siguiente modo:

Producto cartesiano

$$(\forall x, y)\ [(x, y) \in A \times B \iff x \in A \wedge y \in B]$$

Ejemplo

Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{3, 6\}$. Se tiene que

$$A \times B = \{(1, 3), (1, 6), (2, 3), (2, 6), (3, 3), (3, 6)\}$$

Algunas propiedades del producto cartesiano:

Propiedades

Sean A, A', B, B', C, D conjuntos.

1. $A' \subseteq A \wedge B' \subseteq B \Rightarrow A' \times B' \subseteq A \times B$
2. $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$

Demostración.

Demostraremos sólo la primera. Sea $(x, y) \in A' \times B'$. Por definición $x \in A'$ y también $y \in B'$.
Como $A' \subseteq A$ y $B' \subseteq B$ se tiene que $x \in A$ y además $y \in B$. O sea $(x, y) \in A \times B$. $\square$

★Ejemplo importante: reducción al absurdo

Veremos otra técnica de demostración más. Supongamos que queremos demostrar que la proposición r es verdadera. Lo que se hace es **asumir que r es falsa y llegar a una contradicción**. ¡¡En otras palabras, lo que se prueba es que en el mundo en que vivimos $\overline{r}$ no puede ser verdadera!!

Si r es una implicancia del tipo $p \Rightarrow q$ entonces, en una demostración por el absurdo, lo que tendríamos que asumir (para llegar a una contradicción) es $\overline{p \Rightarrow q}$. O sea, $p \wedge \overline{q}$.

Notemos que estamos usando la Tautología 4: $\overline{p \Rightarrow q} \iff p \wedge \overline{q}$.

Veamos, a modo de ejemplo, la siguiente propiedad.

Propiedad

Sean A y B conjuntos. Se tiene que:

$$A = B \iff A \times B = B \times A$$

Demostración.

$\Rightarrow)$ Directa.

$\Leftarrow)$ Reducción al absurdo.
Supongamos que $A \times B = B \times A$ y que al mismo tiempo $A \neq B$. Como $A \neq B$ podemos asumir, sin pérdida de generalidad, la existencia de un $x \in A$ tal que $x \notin B$(si esto no ocurriese tendría que existir un $x \in B$ tal que $x \notin A$ y la situación sería simétrica).

Sea $y \in B$. Se tiene luego que $(x, y) \in A \times B$ pero $(x, y) \notin B \times A$. Esto contradice el hecho de que $A \times B = B \times A$.

□

Cuantificando sobre conjuntos

Dado un conjunto A y una función proposicional $p(x)$, podemos escribir cuantificadores en los que sólo nos interese ver lo que ocurre a los elementos de A. Tenemos así las proposiciones:

Proposiciones cuantificadas sobre conjuntos

1. $(\forall x \in A)p(x)$, que significa que $p(x)$ deber ser cierto para todos los elementos del conjunto A. Notar que esta proposición es equivalente a $(\forall x)(x \in A \Rightarrow p(x))$.
2. $(\exists x \in A)p(x)$, que significa que hay al menos un elemento x de A que hace cierto $p(x)$. Notar que esto equivale a $(\exists x)(x \in A \wedge p(x))$.
3. $(\exists ! x \in A)p(x)$, que significa que hay exactamente un elemento de x de A que hace verdadero $p(x)$.

   Aquí hay dos ideas simultáneas: Existe al menos un $x \in A$ que satisface $p(x)$ (existencia), y que es exactamente uno (unicidad). Claramente esto equivale a $(\exists ! x)(x \in A \wedge p(x))$.

El lector puede fácilmente verificar que estos cuantificadores se niegan de la manera usual:

Negaciones

- $\overline{(\forall x \in A)p(x)} \iff (\exists x \in A)\overline{p(x)}$.
- $\overline{(\exists x \in A)p(x)} \iff (\forall x \in A)\overline{p(x)}$.
- $\overline{(\exists ! x \in A)p(x)} \iff [((\forall x \in A)\overline{p(x)}) \vee ((\exists x, y \in A)(p(x) \wedge p(y) \wedge x \neq y))]$.