MIM2 - Algorithmes d'approximation- TD 4
Emmanuelle Lebhar
elebhar@ens-lyon.fr - Bureau 317

Mille-feuille et k-centre
13 Octobre 2003

Exercice 1 (Variantes du surfacteur minimum)
En vous appuyant sur le problème de la couverture par sommets, donnez des algorithmes d'approximation pour les variantes suivantes du surfacteur minimum (on note ici s^R le mot renversé de s) :

1. Trouvez un mot minimum contenant une occurence de s_i et une de s_i^R pour tout mot $s_i \in S$.
2. Trouvez un mot minimum contenant une occurence de s_i ou une de s_i^R, pour tout mot $s_i \in S$.

Exercice 2 (Variante du k-centre avec tolérance aux pannes)
Il existe une variante robuste du problème du k-centre proposant une tolérance aux pannes. Cette variante admet une entrée supplémentaire $\alpha \leq k$, indiquant à combien de centres doit être connectée chaque ville. Il s'agit toujours de sélectionner les k centres qui minimisent la longueur de l'arête la plus longue d'une ville aux α centres les plus proches.

On dira qu'un sous-ensemble $S \subseteq V$ d'un graphe non-orienté $H = (V, E)$ est *α-dominant* si tout sommet $v \in V$ est adjancent à au moins α sommets de S (en considérant qu'un sommet est toujours adjancent à lui-même). Notons $\mathrm{Dom}_\alpha(H)$ la taille minimale d'un α-dominant de H.

1. Soit I un stable de H^2. Démontrez que $\alpha|I| \leq \mathrm{Dom}_\alpha(H)$.
2. Proposez une 3-approximation pour le problème du k-centre robuste.
   Indication : Calculez un stable maximal M_i de G_i^2, pour $1 \leq i \leq m$. Recherchez le plus petit indice i tel que $|M_i| \leq \lfloor \frac{k}{\alpha} \rfloor$, et tel que le degré de chaque sommet de M_i dans G_i soit $\geq \alpha - 1$.

Exercice 3 (k-centre pondéré)
Nous allons appliquer la technique de l'élagage paramétré et obtenir une 3-approximation pour la généralisation suivante du problème du k-centre métrique.

Les données consistent en une fonction de poids $w : V \rightarrow R^+$, et une borne $W \in R^+$, en plus de la fonction de coût sur les arêtes. Le problème est de trouver un sous-ensemble $S \subseteq V$ de poids total $\leq W$, minimisant la même fonction objectif que précédemment, i.e. :

$$\max_{v \in V} \{ \min_{u \in S} \{ \mathrm{coût}(u, v) \} \}.$$

Notons $\text{wdom}(G)$ le poids minimum d'un dominant de G. En définissant la famille de graphe G_i comme précédemment, nous sommes ramenés à trouver le plus petit indice i tel que $\text{wdom}(G_i) \leq W$. Soit i^* cet indice. Le coût d'une solution optimale vaut $\text{OPT} = \text{coût}(e_{i^*})$.

Soit H, un graphe pondéré. Considérons un stable I de H^2. Pour chaque $u \in I$, notons $s(u)$ le sommet le plus léger parmi u et ses voisins dans H (et non dans H^2). Posons $S = \{s(u) | \ u \in I\}$.

1. Montrez que $w(S) \leq \text{wdom}(H)$.

   Voici l'algorithme. $s_i(u)$ désigne le sommet le plus léger parmi u et ses voisins dans G_i.
   – Construire $G_1^2, G_2^2, \ldots, G_m^2$.
   – Calculer un stable maximal, M_i, pour chaque G_i^2.
   – Calculer $S_i = \{s_i(u) | \ u \in M_i\}$.
   – Trouver l'index minimal i tel que $w(S_i) \leq W$. Notons-le j.
   – Retourner S_j.

2. Montrez que l'algorithme est une 3-approximation pour le problème du k-centre métrique pondéré.

3. Proposez une instance critique.

Exercice 4 (Mille feuille avec fonction de poids constante)

Considérons l'algorithme par mille-feuille pour trouver une couverture par sommets. Nous avons une 2-approximation pour d'autres fonctions de poids : les fonctions constantes – en utilisant tout simplement la 2-approximation pour le problème de la couverture par sommets de taille minimale. La méthode de stratification fonctionne-t-elle toujours en utilisant des fonctions de poids constantes au lieu des fonctions de poids par degré ?