MIM2 - Algorithmes d'approximation - TD 1

Emmanuelle Lebhar
elebhar@ens-lyon.fr - Bureau 317

Représentant de commerce et Arbre de Steiner
22 Septembre 2003

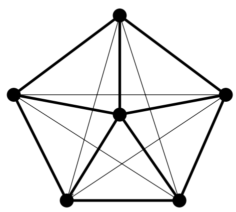
Exercice 1 (Instances critiques du TSP métrique)

Étant donné une α-approximation A pour un problème Π, on appelle *famille d'instances critiques* une famille infinie d'instances $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

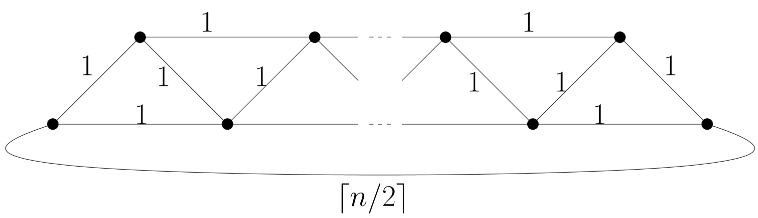
$$(\forall n)\ \sup_{p\geq n} \frac{A(I_p)}{\mathrm{OPT}(I_p)} = \alpha$$

En cours, nous avons vu deux algorithmes d'approximation pour le TSP métrique: le premier est une 2-approximation, il calcule un MST (arbre couvrant de poids minimal), duplique ses arêtes et retourne un cycle eulérien court-circuité de ce graphe. Le second est une 3/2-approximation, il calcule un MST T du graphe, puis un couplage parfait M du sous-graphe induit par les sommets de degré impair de cet arbre, et retourne un cycle eulérien court-circuité de $M + T$.

1. Proposez une instance critique du premier algorithme. Vous pourrez étudier le graphe ci-dessous (graphe complet, arêtes en gras de coût 1, les autres sont de coût 2),



2. Proposez une instance critique du second algorithme. Vous pourrez étudier le graphe suivant (n sommets).



Exercice 2 (Algorithme glouton d'approximation pour le TSP métrique)
Soient n villes, dont les distances vérifient l'inégalité triangulaire. On recherche un tour optimal de distance minimale passant par chaque ville une seule fois. On considère l'algorithme glouton qui, partant d'un tour vide, *insère* les villes une à une dans le tour courant, en minimisant à chaque fois la longueur du raccord.

1. Soit $T = (v_1, \ldots, v_n)$ un tour obtenu par l'algorithme.
   On pose $\text{coût}(v_i) = |v_{i-1}v_i| + |v_iv_{i+1}| - |v_{i-1}v_{i+1}|$ le coût de l'insertion de i dans T.
   On pose $\text{coût}(v_1) = 0$ et $\text{coût}(v_2) = 2|v_1v_2|$ (pour que la somme des coûts soit bien la longueur du tour).
   Soit T_0 un tour optimal, et v_i, v_j deux villes consécutives dans ce tour. Montrer que:
   $$2|v_iv_j| \geq \min\{\text{coût}_T(v_i), \text{coût}_T(v_j)\}$$
2. Montrez qu'il existe un sous-ensemble de $\lfloor n/2 \rfloor$ villes dont la somme des coûts est inférieure à $L(T_0)$ (la longueur du tour optimal).
   Déduisez-en le facteur d'approximation de cet algorithme.

Exercice 3 (Arbre de Steiner)
Étant donné un graphe $G = (V, E)$ non-orienté muni d'une fonction de coût positive sur les arêtes, et dont les sommets sont étiquetés Requis ou Steiner, le problème de l'arbre de Steiner est de trouver un arbre de coût minimum dans G qui contienne tous les sommets étiquetés Requis et n'importe quel sous-ensemble des sommets étiquetés Steiner.
Ce problème est NP-difficile.

1. Montrer qu'il existe une réduction isofacteur du problème de l'arbre de Steiner à celui de l'arbre de Steiner métrique.
   Une réduction isofacteur est une réduction de polynomiale des instances et de leurs solutions (et non des instances seules) qui préserve le rapport de leurs coûts au coût optimal pour chaque instance.
   En conclure qu'approximer le Steiner non-métrique revient à approximer le Steiner métrique. (preuve demandée et à faire proprement)
2. Soit R l'ensemble des sommets étiquetés Requis. Que peut-on dire de l'arbre couvrant de poids minimum (ou MST) du sous-graphe induit par R?
3. Construisez un exemple de graphe pondéré où l'arbre couvrant de coût minimum n'est pas un arbre de Steiner optimal.
4. Montrez que le coût d'un arbre couvrant de poids minimum du sous-graphe induit par les sommets de R est inférieur à $2\,\text{OPT}$.

5. Démontrez que l'analyse de l'algorithme est exacte: il arrive que l'algorithme renvoie une solution coûtant le double de l'optimum.
   On pourra considérer le graphe suivant ayant n sommets Requis et un seul sommet Steiner. Une arête entre un sommet Requis et le sommet Steiner coûte 1 tandis qu'une arête entre deux sommets Requis coûte 2.
   Montrez que c'est une instance critique.