CURSO: MA22A CALCULO EN VARIAS VARIABLES
Ejercicios de Integral de Lebesgue

P.1.- Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrable y sea $g = f$ salvo en un número finito de puntos. Probar que g es integrable y $\int_A f = \int_A g$

P.2.- Sean $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrables tales que $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in A$. Probar que $\int_A f \leq \int_A g$

P.3.- Dar un ejemplo de un conjunto acotado C de medida 0 tal que la frontera de C no tenga medida 0

P.4.- Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función creciente. Probar que el conjunto donde f es discontinua tiene medida nula.

P.5.- Probar que si C tiene medida nula entonces $\int_C f = 0$ para cualquier función f definida en C

P.6.- Si $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función no negativa tal que $\int_A f = 0$.

Probar que $\{x \in A : f(x) \neq 0\}$ tiene medida 0. Ind.: Probar que $\{x \in A : f(x) > 1/n\}$ tiene medida cero.

P.7.- Utilizar el teorema de fubini para dar una demostración sencilla de que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ si estas son continuas. Ind.: si $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0) > 0$, existe un rectángulo A en torno de x_0 tal que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} > 0$ en A.

P.8.- Sea $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua. Se define $F(y) = \int_a^b f(x, y)dx$. Probar la regla de Leibnitz:

$$F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx$$

Ind.: $F(y) = \int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b \left(\int_c^y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy + f(x, c) \right) dx$. (La demostración mostrará que la continuidad de $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ puede se substituida por hipótesis más débiles).

P.9.- Sea $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua. Se definen $F(x, y) = \int_a^x f(t, y)dt$ y $G(x) = \int_a^{g(x)} f(t, x)dt$. Calcular $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ y $G'(x)$

P.10.- Considere los rectángulos: $R_1 = [0, 1] \times [0, 1]$ y $R_2 = [1, 2] \times [-1, 1]$ y la función

$$f(x, y) = \begin{cases} 2x - y & \text{si} \quad x < 1 \\ x^2 + y & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases} \qquad \text{Calcular } \int_{R_1 \cup R_2} f$$

P.11.- En el rectángulo $R = [0, 1] \times [0, 1]$. Sea $f(x, y) = 1$ si x es racional y $f(x, y) = 2y$ si x es irracional. Demuestre que $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y)dydx = 1$

P.12.- Calcular: a) $\int_{-1}^{0}\int_{1}^{2}(x^2y^2+xy^3)dydx$ b) $\int_0^1\int_0^z\int_0^y dxdydz$ c) $\int_0^{\pi/2}\int_{-y}^{y}\sin x dxdy$

d) $\int_{-2}^{1}\int_{0}^{y^2}(x^2+y)dxdy$ e) $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{|x|}dydx$ f) $\int_1^2\int_{x^2}^{x^3}xdydx$

g) $\int_0^2\int_1^3|x-2|\sin xdxdy$ h) $\int_1^2\int_1^x\int_1^{x+y-1}dzdydx$ i) $\int_1^2\int_0^1\int_x^y dzdxdy$

j) $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{|x|}\int_{0}^{1}(x+y+z)dzdydx$

P.13.- Calcular las integrales iteradas de $f(x,y)=x\sin y$ sobre el conjunto $\{(x,y):0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq x\}$

P.14.- Dibujar la región de integración y calcular la integral correspondiente

a) $R=\{(x,y):x\geq 0, x^2+y^2\leq 2, x^2+y^2\geq 1\}$; $f(x,y)=x^2$ (ambas integrales)

b) $R=\{(x,y,z):0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1+x, 0\leq z\leq 2\}$; $f(x,y,z)=x^2+z(\int_R f dzdydx)$

c) $R=\{(x,y,z):0\leq x\leq 1, x^2\leq y\leq\sqrt{x}, 0\leq z\leq x+y\}$; $f(x,y,z)=x+y+z(\int_R f dxdzdy)$

P.15.- Dibuje la región $R=\{(x,y,z):z\leq 4-4x^2-y^2, z\geq 0\}$ exprese el volumen de R como una integral triple y como una integral doble. Calcule el volumen de R

P.16.- Dibujar los cilindros (solidos) definidos por: $x^2+z^2\leq 1$ e $y^2+z^2\leq 1$ Calcule el volumen de la intersección de ellos

P.17.- Probar que $\int_0^x\int_0^{x_1}\cdots\int_0^{x_{n-1}}f(x_n)dx_n\cdots dx_2dx_1=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x(x-t)^{n-1}f(t)dt$

P.18.- Si $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ y $R\subseteq\mathbb{R}^n$, se define $\int_R f=(\int_R f_1, \int_R f_2, \cdots, \int_R f_m)$ donde $f=(f_1,f_2,\cdots,f_m)$ y cada f_i ; es integrable sobre R

a) Si $\vec{a}\in\mathbb{R}^m$ es fijo, y $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ es integrable sobre $R\subseteq\mathbb{R}^n$, demuestre que $\int_R\vec{a}\cdot f=\vec{a}\cdot\int_R f$

b) Si $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m\\ \vec{x} & \to & f(\vec{x})\end{array}$ y $|f|:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}\\ \vec{x} & \to & |f(\vec{x})|\end{array}$ son integrables

Demuestre que $|\int_R f|\leq\int_R|f|$ (use Cauchy-Schwarz y la parte (a))

c) Si $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ es continua en R y $\vec{x}\in\mathrm{Int}(R)$, entonces $\lim_{r\to 0}\frac{1}{\mu(B_r)}\int_{B_r}f=f(\vec{x})$, donde B_r bola con $\vec{x}$ y radio r

P.19.- Demuestre que: $\int_0^1\int_1^\infty(e^{-xy}-2e^{-2xy})dxdy\neq\int_1^\infty\int_0^1(e^{-xy}-2e^{-2xy})dydx$

P.20.- Sea $T(u,v)=(x,y)=(u^2-v^2,2uv)$

a) Sea R el cuadrado de vértices $(1,1),(1,3/2),(3/2,1),(3/2,3/2)$ dibuje $T(R)$

b) Dibuje $T'(1,1)(R)$, es decir, la imagen de R bajo la función $T'(1,1)$

c) Dibuje $T(1,1)-T'(1,1)(1,1)$

d) Encuentre el área de R y el área de $T(R)$

P.21.- Sea $T(u,v) = (x,y) = (u\cos v, u\sin v)$

a) Sea R el cuadrado de vértices $(0,0),(0,\pi/2),(\pi/2,0),(\pi/2,\pi/2)$ dibuje $T(R)$

b) Dibuje $T'(\pi/2,0)(R)$

c) Dibuje $T(\pi/2,0) - T'(\pi/2,0)(\pi/2,0)$

d) Calcule el área de R y el área de$T(R)$

P.22.- Sea T como en P.29 y $R = \{(u,v) : u^2+v^2 \leq 1, u \geq 0, v \geq 0\}$

a) Dibuje $S = T(R)$ b) Calcule $\displaystyle\int_S \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

P.23.- Sea $T(u,v) = (x,y) = (u+v, u^2-v)$ y $R = \{(u,v) : u+v \leq 2, u \geq 0, v \geq 0\}$

a) Dibuje $S = T(R)$ b) Calcule $\displaystyle\int_S \frac{dxdy}{\sqrt{1+4x+4y}}$

P.24.- Sea $T(u,v) = (x,y) = (u, v(1+u^2))$ y $R = \{(u,v) : 0 \leq u \leq 3, 0 \leq v \leq 2\}$

a) Dibuje $S = T(R)$ b) Calcule $\displaystyle\int_S x dxdy$