CURSO: MA22A CALCULO EN VARIAS VARIABLES
Lista de ejercicios 4

P.1.- Sea $A = \{(x,y)/x > 0, 0 < y < x^2\}$

a) Probar que toda recta por el origen contiene un intervalo centrado en $(0,0)$ el cual está cotenido en $\mathbb{R}^2 \setminus A$

b) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = 1$ si $(x,y) \in A$ y $f(x,y) = 0$ si $(x,y) \notin A$. Probar que $\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(0,0)$ existe para todo $\hat{u}$ (unitario) pero que f no es continua en $(0,0)$

P.2.- a) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua y diferenciable. Demostrar que f no es inyectiva (ind: si $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \neq 0 \ \forall (x,y) \in A \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto considerar $g : A \to \mathbb{R}^2$ definida por $g : (x,y) = (f(x,y), y)$

b) Probar (a) para el caso general de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ función continua diferenciable con $m < n$.

P.3.- Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Para cada x defina $g_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_x(y) = f(x,y)$. Suponga que para cada x existe un único y tal que $g'_x(y) = 0$. Si se denota por $c(x)$ tal y, demostrar:

a) Si $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \neq 0 \forall (x,y)$, entonces c es diferenciable y

$$c'(x) = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, c(x))}{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, c(x))}$$

(Indicación: $g'_x(y) = 0 \iff \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$)

b) Si $c'(x) = 0$, entoces existe un $\bar{y}$ tal que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, \bar{y}) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x, \bar{y}) = 0$

P.4.- Demuestre que la condición de que f sea continuamente diferenciable en el Teorema de la Función Inversa es necesaria incluso en el caso $n = 1$. Para ello considere el siguiente caso: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = t + 2t^2 \sin(\frac{1}{t})$ para $t \neq 0$ y $f(0) = 0$. Probar que $f'(0) = 0$, f' es acotada en $(-1,1)$ pero f no es invertible localmente en $t = 0$.

P.5.- Dado el sistema:
$$\left.\begin{array}{rcl} 3x + y - z + u^2 &=& 0 \\ x - y + 2z + u &=& 0 \\ 2x + 2y - 3z + 2u &=& 0 \end{array}\right|$$

Determine que trio de variables puede ser dejado en función de la otra variable para resolverlo.

P.6.- a) Encontrar $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ para:

i) $f(x,y) = xy + x^2 y3$

ii) $f(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$

iii) $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$

b) Encontrar $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$ si $f(x,y) = \log(x+y)$

c) Calcular $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ si:

i) $f(x,y) = \log(x^2+y^2)$

ii) $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$

d) Probar directamente, que si $f(x,y)$ es un polinomio (en x e y) entonces $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

P.7.- Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 3$, $\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = -2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,1) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2,1) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(2,1) = 1$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,1) = 2$

Si $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es la función $g(u,v) = (u+v, uv)$, calcular $\frac{\partial^2 (fog)}{\partial v \partial u}$ en $(1,1)$.

P.8.- Sean $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continuas y diferenciables y $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $F(x,y,z) = (f(x,y,z), g(x,y,z), f(x,y,z) + g(x,y,z))$ probar que F no posee inversa diferenciable.

P.9.- Determine el conjunto de puntos para los cuales y se define (implícitamente) en función de x en la ecuación $(x-2)^3 y + xe^{y-1} = 0$ Comprobar que $(1,1)$ es uno de tales puntos, y encuentre un valor aproximado de y para $x = 0,98$

P.10.- Encontrar puntos críticos para las siguientes funciones:

i) $f(x,y) = x + y \sin x$

ii) $f(x,y,z) = xy + xz$

iii) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$

P.11.- Encontrar el punto de la curva $(x,y,z) = (\cos t, \sin t, \sin(t/2))$ que está más lejos del origen (y el más cercano).

P.12.- Encontrar puntos extremos para los siguientes casos:

a) $f(x,y,z) = x(y+z)$ tal que $x^2 + y^2 = 1$ y $xz = 1$

b) $f(x,y) = x + y^2$ tal que $2x^2 + y^2 = 1$

P.13.- Una caja (rectangular) sin tapa tiene una area de $32cm^2$ encontrar las dimensiones de la caja de modo que su volumen sea máximo.

P.14.- Encontrar la distancia mínima entre la elipse $x^2 + 2y^2 = 1$ y la recta $x + y = 4$

P.15.- Sean $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continuas y diferenciables tal que f alcanza un valor máximo M en (x_0, y_0) cuando (x,y) está sujeto a la condición $g(x,y) = 0$ probar que la curva de nivel definida por $f(x,y) = M$ es tangente a la curva $g(x,y) = 0$ en (x_0, y_0). Ejemplifique.

P.16.- Sean $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_m$ m puntos dados en $\mathbb{R}^n$ y sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $f(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{m} ||\vec{x} - \vec{p}_k||^2$

Encontrar los puntos extremos de f.

P.17.- Sea W el sub-espacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ definido por $A\vec{x} = 0$ con A Matriz de mxn y $r(A) = m$ si $\vec{b} \notin W$ encuentre el punto en W que está a mínima distancia del punto $\vec{b}$ (tal punto es la proyeccción de $\vec{b}$ sobre W).

P.18.- Si $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ son reales positivos, demuestre que

$(a_1 \cdot a_2 \cdots a_n)^{1/n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$

P.19.- Sea q un polinomio cuadrático (en $\mathbb{R}^n$) y f la función bilineal simétrica asociada a q (i.e. $q(\vec{x}) = f(\vec{x}, \vec{x})$) probar que q es diferenciable y que $q'(\vec{x}) \cdot \vec{y} = 2f(\vec{x}, \vec{y})$

P.20.- Encontrar el polinomio de Taylor de tercer grado de la función $f(x, y) = (x + y)^3$ en el punto

a) $(x, y) = (0, 0)$
b) $(x, y) = (1, 2)$

P.21.- Encontrar la mejor aproximación de segundo grado a la función $f(x, y) = xe^y$ en una vecindad de $(2, 0)$.

P.22.- Idem que el problema 21 para $f(x, y) = x^{y+1}$ en $(2, 0)$

P.23.- Encontrar los términos cuadraticos de la expansión de Taylor de xe^{x+y} en $(0, 0)$

a) Calculando las derivadas parciales correspondientes
b) Mediante sustitución.

P.24.- Idem que el probblema 23 para $f(x, y) = e^{\sin(x+y)}$ en $(0, 0)$.

P.25.- Si $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{x^2+y^2}$, usar una expansión de Taylor de f para calcular $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0, 0)$

P.26.- Idem que para el problema 25 para:

a) $f(x, y, z) = (x^2 + 2xy + y^2)e^z$ en $(1, 2, 0)$
b) $f(x, y, z) = xy^2z^3$ en $(1, 2, -1)$

P.27.- Escribir xy^2z^3 como un polinomio en $(x - 1), y, z + 1$

P.28.- Idem que para el (problema 23) para $f(x, y) = \log\cos(x + y)$ en $(0, 0)$

P.29.- Calcular $D^k f(\vec{a})$ para:

i) $f(x, y) = x^3y + 3x^2 + 2xy^3$, $k = 2$, $\vec{a} = (1, 2)$
ii) $f(x, y, z) = \frac{1}{x+y+z+1}$, $k = 2$, $\vec{a} = (0, 0, 0)$
iii) $f(x, y, z) = x^3 + 3xy^2 + 4xy^3 + 6x^2y^3 + 7y^5$, $k = 4$, $\vec{a} = (0, 0, 0)$

P.30.- Determine todos los puntos críticos y clasifíquelos (máximo, mínimo) en los siguientes casos:

i) $\sin x \cos x$
ii) x^2y^2
iii) $x^2 + 4xy - y^2 - 8x - 6y$
iv) $x^2 + 2y^2 - x$
v) $x \sin y$
vi) $x^4 + y^4$
vii) $\exp(-x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2)$.