IV ESPACIOS DE HILBERT

4.0 Introducción

Los espacios de Hilbert son los espacios vectoriales normados más usados en los modelos matemáticos de la ingeniería y la de física. Este capítulo constituye una muy breve introducción a estos espacios.

Todo el capítulo gira en torno al hecho que en un espacio de Hilbert la proyección de un punto sobre un conjunto convexo cerrado siempre existe, es única y, puede caracterizarse por la desigualdad 4.3.1.

Terminamos el capítulo con tres resultados importantes: el teorema de representación de Riesz, el teorema de Hanh-Banach y el lema de Farkas.

4.1 Producto interno en un espacio vectorial

Definición 4.1.1: Dado un e.v. $\vec{E}$ sobre el cuerpo $I\!R$, se llama producto interno o producto escalar en $\vec{E}$ a toda función bilineal simétrica y definida positiva $b : \vec{E} \times \vec{E} \to I\!R$, esto es, para todo $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \vec{E}$ y $\lambda \in I\!R$ se tiene:

i) $b(\vec{u}+\vec{v},\vec{w}) = b(\vec{u},\vec{w}) + b(\vec{v},\vec{w})$
   $b(\vec{u},\vec{v}+\vec{w}) = b(\vec{u},\vec{v}) + b(\vec{u},\vec{w})$.

ii) $b(\lambda\vec{u},\vec{v}) = \lambda b(\vec{u},\vec{v})$
    $b(\vec{u},\lambda\vec{v}) = \lambda b(\vec{u},\vec{v})$.

iii) $b(\vec{u},\vec{v}) = b(\vec{v},\vec{u})$

iv) $b(\vec{u},\vec{u}) > 0$ para todo $\vec{u} \neq 0$.

Nota 4.1.1: Las propiedades i) y ii) corresponden al hecho que b es bilineal, la propiedad iii) a la simetria de b y la propiedad iv) al hecho de ser definida positiva.

Nota 4.1.2: En adelante usaremos para el producto interno la notación $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ en lugar de $b(\vec{u},\vec{v})$.

Teorema 4.1.1: Todo producto interno en un e.v. $\vec{E}$ verifica la llamada desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle^{\frac{1}{2}} \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle^{\frac{1}{2}} \quad \text{para todo } \vec{u}, \vec{v} \in \vec{E} \qquad 4.1.3$$

Además, la igualdad se tiene si y solo si u y v son colineales, esto es, si $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ para algún $\lambda \in I\!R$ o si $\vec{v} = \vec{0}$.

Demostración: Dados $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{E}$ no colineales, para todo $\lambda, \mu \in I\!R \setminus \{0\}$ se tiene

$$0 < \langle \lambda\vec{u} - \mu\vec{v}, \lambda\vec{u} - \mu\vec{v} \rangle = \lambda^2 \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle - 2\lambda\mu \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \mu^2 \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$$

y como $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle > 0$ y $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle > 0$, haciendo $\lambda := \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle^{\frac{1}{2}}$ y $\mu := \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle^{\frac{1}{2}}$ obtenemos

$$2\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle^{\frac{1}{2}} \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle^{\frac{1}{2}} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle < 2\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle$$

y dividiendo por $[\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle^{\frac{1}{2}} \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle^{\frac{1}{2}}]$ llegamos a la desigualdad

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle < \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle^{\frac{1}{2}} \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle^{\frac{1}{2}} \text{ para todo } \vec{u}, \vec{v} \in \vec{E} \text{ no colineales.}$$

Si en la desigualdad anterior hacemos $\vec{u} = -\vec{v}$ y $\vec{v} = \vec{u}$ obtenemos

$$-\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle^{\frac{1}{2}} \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle^{\frac{1}{2}} < \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \quad \text{para todo} \quad \vec{u}, \vec{v} \in \vec{E} \text{ no colineales}$$

Se obtiene así la desigualdad de Cauchy-Schwarz para $\vec{u}, \vec{v}$ no colineales.
La igualdad, cuando u y v son colineales, se obtiene trivialmente.

Nota 4.1.3: Es fácil demostrar que un producto interno b en un e.v. $\vec{E}$, define una norma en $\vec{E}$, esta es $\|\vec{u}\| = [\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle]^{1/2}$. Recíprocamente no toda norma se puede definir a partir de un producto interno.

Ejemplo 4.1.1: De las tres normas que hemos definido en $I\!R^n$ (ver ejemplo 1.1.1) sólo la norma $\| \ \|_2$ se puede definir a partir de un producto interno, este es

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle := u_1 v_1 + ... + u_n v_n$$

que usualmente se denota por $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
De las dos normas que hemos usado en $\mathcal{C}([a,b], I\!R)$, la norma $\| \ \|_\infty$ definida por 3.1.1 y la norma $\| \ \|_1$ definida por 3.4.1, ninguna se puede definir a partir de un producto interno. En este mismo e.v. se puede definir el producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)g(x)dx \qquad 4.1.1$$

que define en $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ la norma

$$\|f\|_2 := [\int_a^b [f(x)]^2 dx]^{\frac{1}{2}} \qquad 4.1.2$$

Definición 4.1.2: Se llama espacio de Hilbert a todo espacio de Banach (ver definición 1.5.2) cuya norma está definida por un producto interno.

Ejemplo 4.1.2: De acuerdo al teorema 1.5.2, $\mathbb{R}^n$ con la norma $\|\ \|_2$ es un espacio de Hilbert. Pero, de acuerdo a lo que decíamos en el ejemplo 4.1.1, $\mathbb{R}^n$ con la norma $\|\ \|_1$ o $\mathbb{R}^n$ con la norma $\|\ \|_\infty$ no son espacios de Hilbert.

Teorema 4.1.2: Sea $\vec{E}$ un espacio de Hilbert. Las funciones $\langle\cdot,\cdot\rangle$ de $\vec{E}\times\vec{E}$ en $\mathbb{R}$ y $\langle\vec{b},\cdot\rangle$ de $\vec{E}$ en $\mathbb{R}$, con $\vec{b}\in\vec{E}$ fijo, son continuas.

Demostración: i) Demostremos que la función bilineal $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es continua en el e.v.n. producto $\vec{E}\times\vec{E}$. Para esto usemos el teorema 2.3.1. Debemos probar entonces que dado $(\vec{a},\vec{b})\in\vec{E}\times\vec{E}$, toda sucesión $(\vec{x}_k,\vec{y}_k)\to(\vec{a},\vec{b})$ verifica que $\langle\vec{x}_k,\vec{y}_k\rangle\to\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$. Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene que

$$\begin{aligned}|\langle\vec{x}_k,\vec{y}_k\rangle-\langle\vec{a},\vec{b}\rangle| &= |\langle\vec{x}_k-\vec{a},\vec{y}_k\rangle+\langle\vec{a},\vec{y}_k-\vec{b}\rangle|\\ &\le \|\vec{x}_k-\vec{a}\|\|\vec{y}_k\|+\|\vec{a}\|\|\vec{y}_k-\vec{b}\|\end{aligned}$$

y si $(\vec{x}_k,\vec{y}_k)\to(\vec{a},\vec{b})$, del teorema 1.4.2 vemos que $\vec{x}_k\to\vec{a}$ e $\vec{y}_k\to\vec{b}$, lo que nos permite concluir
ii) la continuidad de la función lineal $\langle\vec{b},\cdot\rangle$ es una consecuencia inmediata del teorema anterior que nos dice que

$$|\langle\vec{b},\vec{x}\rangle|\le\|\vec{b}\|\|\vec{x}\| \text{ para todo } \vec{x}\in\vec{E}$$

y de la caracterización de la continuidad de una función lineal dada por el teorema 2.7.1.

4.2 Proyección de un punto sobre un conjunto en un espacio de Hilbert

Definición 4.2.1: Una parte C de un e.v. $\vec{E}$ se dice convexa si para todo par de elementos $\vec{a}, \vec{b} \in C$ se tiene que

$$[\vec{a}, \vec{b}] := \{\vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a}) : \lambda \in [0,1]\} \subset C \qquad 4.2.1$$

Nota 4.2.1: Los conjuntos convexos en un e.v. tienen una gran importancia. En el próximo teorema veremos una de sus propiedades fundamentales. Más adelante veremos otras.

Nota 4.2.2: Recordemos que se llama proyección de un elemento $\vec{a}$ de un e.v.n. $\vec{E}$ sobre un subconjunto A de $\vec{E}$ a todo elemento $\vec{p} \in A$ que verifica la igualdad

$$d_A(\vec{a}) := \inf_{\vec{x} \in A} ||\vec{x} - \vec{a}|| = ||\vec{p} - a|| \qquad 4.2.2$$

y, que en el teorema 2.5.4 demostramos que si A es compacto entonces $\vec{p}$ siempre existe. Después, en la nota 2.5.3 veíamos que si E era de dimensión finita, bastaba con suponer A cerrado para asegurar la existencia de $\vec{p}$. En esta sección daremos un nuevo teorema de existencia de la proyección. Previamente necesitamos el siguiente lema técnico.

Lema 4.2.1: Sean $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tres elementos en un espacio de Hilbert $\vec{E}$ y, $\vec{m} := \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$ el punto medio del trazo $[b, c]$. Entonces se tiene la igualdad:

$$||\vec{a} - \vec{b}||^2 + ||\vec{a} - \vec{c}||^2 = 2||\vec{a} - \vec{m}||^2 + \frac{1}{2}||\vec{b} - \vec{c}||^2$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
||\vec{a} - \vec{b}||^2 + ||\vec{a} - \vec{c}||^2 &= ||\vec{a}||^2 - 2\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle + ||\vec{b}||^2 + ||\vec{a}||^2 - 2\langle \vec{a}, \vec{c}\rangle + ||\vec{c}||^2 \\
&= 2||\vec{a}||^2 - 2\langle \vec{a}, \vec{b} + \vec{c}\rangle + ||\vec{b} + \vec{c}||^2 - 2\langle \vec{b}, \vec{c}\rangle \\
&= 2[||\vec{a}||^2 - 2\langle \vec{a}, \vec{m}\rangle + ||\vec{m}||^2] + \frac{1}{2}||\vec{b} + \vec{c}||^2 - 2\langle \vec{b}, \vec{c}\rangle \\
&= 2||\vec{a} - \vec{m}||^2 + \frac{1}{2}||\vec{b} - \vec{c}||^2
\end{aligned}$$

Teorema 4.2.1: Si $\vec{E}$ es un espacio de Hilbert y C un conjunto convexo cerrado en $\vec{E}$, entonces todo elemento $\vec{a} \in \vec{E}$, tiene una proyección sobre C. Esto significa, de acuerdo a la igualdad 4.2.2, que existe un elemento $\vec{p}(\vec{a}) \in C$ que verifica

$$d_C(\vec{a}) = ||\vec{p}(\vec{a}) - \vec{a}||$$

Se tiene además que esta proyección es única.

Demostración: De acuerdo a la definición de $d_C(\vec{a})$ dada por 2.1.3, debe existir una sucesión $\{\vec{x}_k\}$ en C tal que

$$d_C(\vec{a}) = \lim ||\vec{x}_k - \vec{a}|| \qquad (*)$$

Demostremos primero que toda sucesión $\{x_k\}$ en C que verifica $(*)$ es una sucesión de Cauchy. Para esto apliquemos el lema anterior al trío $\vec{a}, \vec{x}_j, \vec{x}_k$

$$||\vec{x}_j - \vec{x}_k||^2 = 2||\vec{a} - \vec{x}_j||^2 + 2||\vec{a} - \vec{x}_k||^2 - 4||\vec{a} - \frac{\vec{x}_j + \vec{x}_k}{2}||^2$$

Como C es un convexo se tiene que

$$\frac{\vec{x}_j + \vec{x}_k}{2} = \vec{x}_k + (1 - \frac{1}{2})(\vec{x}_j - \vec{x}_k) \in C$$

lo que implica que

$$-4||\vec{a} - \frac{\vec{x}_j + \vec{x}_k}{2}||^2 \leq -4d_C^2(\vec{a})$$

y obtenemos la desigualdad

$$||\vec{x}_j - \vec{x}_k||^2 \leq 2||\vec{a} - \vec{x}_j||^2 + 2||\vec{a} - \vec{x}_k||^2 - 4d_C^2(\vec{a}) \qquad (**)$$

Así entonces, dado $\varepsilon > 0$, concluimos de la relación (*) que existe $K \in I\!N$ tal que

$$\left| \ 2||\vec{a} - \vec{x}_j||^2 + 2||\vec{a} - \vec{x}_k||^2 - 4d_A^2(\vec{a}) \ \right| \leq \varepsilon \quad \text{para todo} \quad j, k \geq K$$

y de la desigualdad (**) obtenemos

$$||\vec{x}_j - \vec{x}_k||^2 \leq \varepsilon \quad \text{para todo} \ \ j, k \geq K$$

lo que muestra que $\{\vec{x}_k\}$ es una sucesión de Cauchy.
Por ser $\vec{E}$ un espacio de Hilbert sabemos que $\{\vec{x}_k\}$ debe converger a un elemento $\vec{p} \in \vec{E}$ y como C es un conjunto cerrado, de acuerdo al teorema 1.4.1, $\vec{p} \in C$. La continuidad de la función $|| \cdot - \vec{a}||$ nos permite concluir, de la relación (*), que

$$d_C(\vec{a}) = ||\vec{p} - \vec{a}||$$

es decir, que $\vec{p}$ es una proyección de $\vec{a}$ sobre C.
Para terminar debemos demostrar la unicidad de la proyección. Si $\vec{p}\,'$, es otra proyección de $\vec{a}$ en C, se tendrá que la sucesión $\{\vec{x}_k'\}$, definida por $\vec{x}_k' := \vec{x}_k$ si k es par y $\vec{x}_k' := \vec{p}\,'$ si k es impar, también va a verificar la igualdad (*) (puesto que $\|\vec{p}-\vec{a}\| = \|\vec{p}\,'-\vec{a}\|$) y, será entonces de Cauchy y por lo tanto convergente. Del teorema 1.4.5 vemos que $\vec{p}\,'$ y $\vec{p}$ son puntos de acumulación de $\{\vec{x}_k'\}$ y como ella es convergente, de la nota 1.4.3 concluimos que $\vec{p}\,' = \vec{p}$.

Nota 4.2.3: Es importante tener claro que en un espacio de Banach la proyección sobre un convexo cerrado no es necesariamente única, como lo muestra el ejemplo i) que vimos en la nota 2.5.2. El hecho que la norma pueda definirse a partir de un producto interno, es entonces el punto clave para asegurar la unicidad.

4.3 Caracterización de la proyección sobre un conjunto convexo

Teorema 4.3.1: Si C es una parte convexa cerrada de un espacio de Hilbert $\vec{E}$, entonces la proyección de $\vec{a} \in \vec{E}$ sobre C es el único elemento $\vec{p} \in C$ que verifica la desigualdad

$$\langle \vec{a}-\vec{p}, \vec{x}-\vec{p}\,\rangle \leq 0 \quad \text{para todo} \quad \vec{x} \in C \qquad 4.3.1$$

Demostración:

i) Demostremos que 4.3.1 implica que $\vec{p}(\vec{a}) = \vec{p}$.
De la identidad

$$\begin{aligned}\|\vec{a}-\vec{x}\|^2 &= \|\vec{a}-\vec{p}-(\vec{x}-\vec{p})\|^2 \\ &= \|\vec{a}-\vec{p}\|^2 - 2\langle \vec{a}-\vec{p}, \vec{x}-\vec{p}\rangle + \|\vec{x}-\vec{p}\|^2\end{aligned}$$

vemos que 4.3.1 implica que

$$\|\vec{a}-\vec{x}\| \geq \|\vec{a}-\vec{p}\| \quad \text{para todo } \vec{x} \in C$$

lo que equivale a decir que $\vec{p}$ es la proyección $\vec{a}$ sobre C.

ii) Demostremos ahora que la proyección $\vec{p}(\vec{a})$ verifica la desigualdad 4.3.1.
Puesto que C es convexo se tiene que $p(\vec{a}) + t(\vec{x}-\vec{p}(\vec{a})) \in C$ para todo $\vec{x} \in C$ y todo $t \in [0,1]$. Se tendrá entonces que

$$\|\vec{a}-[\vec{p}(\vec{a}) + t(\vec{x}-\vec{p}(\vec{a}))]\|^2 \geq \|\vec{a}-\vec{p}(\vec{a})\|^2$$

y, desarrollando el cuadrado de la izquierda se obtiene para todo $\vec{x} \in C$ la desigualdad

$$-2\langle \vec{a} - \vec{p}(\vec{a}), t(\vec{x} - p(\vec{a}))\rangle + t^2\|\vec{x} - \vec{p}(\vec{a})\|^2 \geq 0 \quad \forall t \in [0,1]$$

y simplificando por t

$$2\langle \vec{a} - \vec{p}(\vec{a}), \vec{x} - \vec{p}(\vec{a})\rangle \leq t\|\vec{x} - \vec{p}(\vec{a})\|^2 \quad \forall t \in]0,1]$$

lo cual implica, haciendo tender t a cero, que $\vec{p}(\vec{a})$ verifica la desigualdad 4.3.1.

Teorema 4.3.2: Si $\vec{S}$ es un subespacio vectorial cerrado de un espacio de Hilbert $\vec{E}$, entonces la proyección de $\vec{a} \in \vec{E}$ sobre $\vec{S}$ es el único elemento $\vec{p} \in \vec{S}$ que verifica

$$\langle \vec{a} - \vec{p}, \vec{x}\rangle = 0 \quad \text{para todo } \vec{x} \in \vec{S} \tag{4.3.2}$$

Demostración: Por ser $\vec{S}$ un conjunto convexo cerrado, podemos aplicar el teorema anterior y concluir que la proyección $\vec{p}(\vec{a})$ es el único $\vec{p} \in \vec{S}$ que verifica

$$\langle \vec{a} - \vec{p}, \vec{x} - \vec{p}\rangle \leq 0 \text{ para todo } \vec{x} \in \vec{S} \tag{$*$}$$

Como $\vec{S}$ es un subespacio vectorial y $\vec{p} \in \vec{S}$, es claro que

$$\vec{x} \in \vec{S} \Leftrightarrow \vec{x} - \vec{p} \in \vec{S} \Leftrightarrow -(\vec{x} - \vec{p}) \in S$$

Haciendo entonces en (*) los cambios de variable $\vec{y} = \vec{x} - \vec{p}$ y $\vec{z} = -(\vec{x} - \vec{p})$ concluimos que (*) es equivalente a " $\langle \vec{a} - \vec{p}, \vec{y}\rangle \leq 0$ para todo $\vec{y} \in S$ " y a " $\langle \vec{a} - \vec{p}, \vec{z}\rangle \geq 0$ para todo $\vec{z} \in \vec{S}$ ", respectivamente. Esas dos desigualdades nos muestran que (*) es equivalente a 4.3.2 que es lo que queríamos demostrar.

Nota 4.3.1: Se demuestra fácilmente que todo subespacio vectorial de dimensión finita de un e.v.n. $\vec{E}$ es un conjunto cerrado. En particular todo subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ será cerrado. Por otra parte, en la sección 3.5 vimos que el sub e.v. de los polinomios, en el e.v. $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ dotado la norma $\| \|_\infty$, no es cerrado.

Definición 4.3.1: Dos elementos $\vec{a}, \vec{b}$ en un espacio de Hilbert se dirán ortogonales o perpendiculares si

$$\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle = 0 \tag{4.3.3}$$

Un elemento $\vec{a} \in \vec{E}$ se dirá ortogonal o perpendicular a un subespacio vectorial $\vec{S}$ de $\vec{E}$ si es ortogonal a todos los elementos de $\vec{S}$, es decir si

$$\langle a, \vec{x} \rangle = 0 \quad \text{para todo } \vec{x} \in \vec{S} \qquad 4.3.4$$

Dos subespacios vectoriales $\vec{S}, \vec{G}$ de un espacio de Hilbert $\vec{E}$ se dirán ortogonales si

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0 \quad \text{para todo} \quad \vec{x} \in \vec{S}, \vec{y} \in \vec{G}$$

Nota 4.3.2: Del teorema anterior y de la definición anterior podemos decir que la proyección de un elemento $\vec{a}$ de un espacio de Hilbert $\vec{E}$ sobre un subespacio vectorial $\vec{S}$ es el elemento $\vec{p} \in \vec{S}$ tal que $\vec{a} - \vec{p}$ es ortogonal a todos los elementos de $\vec{S}$.

Definición 4.3.2: Se llama sistema ortonormado en un espacio de Hilbert $\vec{E}$ a todo conjunto $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ de elementos de $\vec{E}$ que son ortogonales entre si y de norma uno.

Teorema 4.3.3: Sea $\vec{S}$ el subespacio vectorial generado por un sistema ortonormado $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ en un espacio de Hilbert $\vec{E}$. Entonces la proyección $\vec{p}(\vec{a})$ de un elemento $\vec{a} \in \vec{E}$ sobre $\vec{S}$ está dada por

$$\vec{p}(\vec{a}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{e}_i \quad \text{donde} \quad \lambda_i = \langle \vec{a}, \vec{e}_i \rangle \qquad 4.3.5$$

y se tiene

$$||\vec{a} - \vec{p}(\vec{a})||^2 = ||\vec{a}||^2 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \qquad 4.3.6$$

Demostración: Como decíamos en la nota 4.3.1, por ser $\vec{S}$ de dimensión finita, es cerrado en $\vec{E}$. Entonces de la relación 4.3.2, que caracteriza la proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{S}$, vemos que $\vec{p}(\vec{a}) = \sum \lambda_i \vec{e}_i$ debe verificar

$$\langle \vec{a} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = 0 \quad \text{para todo} \quad j : 1...n$$

y, como los $\vec{e}_i$ son ortonormales, estas n igualdades se reducen a

$$\langle \vec{a}, \vec{e}_j \rangle - \lambda_j = 0 \quad \text{para todo} \quad j : 1...n$$

lo que demuestra la fórmula 4.3.5.

Calculemos ahora $||\vec{a} - \vec{p}(\vec{a})||^2$:

$$\begin{aligned} ||\vec{a} - \vec{p}(\vec{a})||^2 &= \langle \vec{a} - \vec{p}(\vec{a}), \vec{a} - \vec{p}(\vec{a}) \rangle = \langle \vec{a} - \vec{p}(\vec{a}), \vec{a} \rangle \\ &= ||\vec{a}||^2 - \langle \vec{p}(\vec{a}), \vec{a} \rangle = ||\vec{a}||^2 - \langle \sum \lambda_i \vec{e}_i, \vec{a} \rangle \\ &= ||\vec{a}||^2 - \sum \lambda_i \langle \vec{e}_i, \vec{a} \rangle = ||\vec{a}||^2 - \sum \lambda_i^2 \end{aligned}$$

que es lo que queríamos probar.

Teorema 4.3.4: La proyección $\vec{p}(\vec{a})$ de un elemento $\vec{a}$ de un espacio de Hilbert $\vec{E}$ sobre la recta generada por un elemento $\vec{b} \neq \vec{0}$, está dada por

$$\vec{p}(\vec{a}) = \langle \vec{a}, \frac{\vec{b}}{||\vec{b}||} \rangle \frac{\vec{b}}{||\vec{b}||} \tag{4.3.7}$$

Demostración: Se trata de proyectar $\vec{a}$ sobre el subespacio vectorial generado por el sistema ortonormado $\{\frac{\vec{b}}{||\vec{b}||}\}$ formado por un solo elemento. La fórmula 4.3.7 es entonces una consecuencia inmediata de la fórmula 4.3.5.

4.4 Continuidad de la proyección sobre un conjunto convexo

Teorema 4.4.1: La función $\vec{p}(\cdot)$ que a todo elemento de un espacio de Hilbert $\vec{E}$ le hace corresponder su proyección sobre un subespacio $\vec{S}$ de dimensión finita, es lineal y continua.

Demostración: De acuerdo al teorema 4.3.3 hay que demostrar que la función

$$\vec{p}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i$$

donde $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ es una base ortonormada de $\vec{S}$, es lineal y continua, lo que es una consecuencia inmediata de la linealidad y continuidad de cada una de las funciones $\langle \cdot, e_i \rangle$.

Teorema 4.4.2: La función $\vec{p}(\cdot)$ que a todo elemento de un espacio de Hilbert $\vec{E}$ le hace corresponder su proyección sobre un convexo cerrado C de $\vec{E}$, es Lipschitziana:

$$||\vec{p}(\vec{x}) - \vec{p}(\vec{z})|| \leq ||\vec{x} - \vec{z}|| \text{ para todo } \vec{x}, \vec{z} \in E \tag{4.4.1}$$

Demostración: Si escribimos $\vec{x} - \vec{z} = \vec{p}(\vec{x}) - \vec{p}(\vec{z}) + \vec{u}$ vemos que

$$\begin{aligned}\|\vec{x} - \vec{z}\|^2 &= \|\vec{p}(\vec{x}) - \vec{p}(\vec{z})\|^2 + 2\langle \vec{p}(\vec{x}) - \vec{p}(\vec{z}), \vec{u}\rangle + \|\vec{u}\|^2 \\ &\geq \|\vec{p}(\vec{x}) - \vec{p}(\vec{z})\|^2 + 2\langle \vec{p}(\vec{x}) - \vec{p}(\vec{z}), \vec{u}\rangle\end{aligned}$$

Por lo tanto, para obtener 4.4.1 bastará con demostrar que $\langle \vec{p}(\vec{x}) - \vec{p}(\vec{z}), \vec{u}\rangle \geq 0$. Puesto que $\vec{u} = \vec{x} - \vec{p}(\vec{x}) - (\vec{z} - \vec{p}(\vec{z}))$ se tendrá

$$\langle \vec{p}(\vec{x}) - \vec{p}(\vec{z}), \vec{u}\rangle = \langle \vec{x} - \vec{p}(\vec{x}), \vec{p}(\vec{x}) - \vec{p}(\vec{z})\rangle + \langle \vec{z} - \vec{p}(\vec{z}), \vec{p}(\vec{z}) - \vec{p}(\vec{x})\rangle$$

y del teorema 4.3.1 se desprende de inmediato que cada uno de los dos sumandos de la derecha de esta igualdad son no negativos.

4.5 Espacios suplementarios y proyección

Definición 4.5.1: Dos subespacios vectoriales $\vec{S}_1, \vec{S}_2$ de un e.v. $\vec{E}$ se dirán suplementarios si $\vec{S}_1 \cap \vec{S}_2 = \{\vec{0}\}$ y para todo $\vec{x} \in \vec{E}$ existen $\vec{x}_1 \in \vec{S}_1, \vec{x}_2 \in \vec{S}_2$ tales que $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$.

Teorema 4.5.1: Si $\vec{S}_1$ y $\vec{S}_2$ son dos subespacios vectoriales cerrados suplementarios ortogonales en un espacio de Hilbert $\vec{E}$, entonces

$$\vec{x} = \vec{p}_1(\vec{x}) + \vec{p}_2(\vec{x}) \quad \text{para todo} \quad \vec{x} \in \vec{E}$$

donde $\vec{p}_1(\vec{x})$ y $\vec{p}_2(\vec{x})$ denotan la proyecciones de $\vec{x}$ sobre $\vec{S}_1$ y $\vec{S}_2$ respectivamente.

Demostración: Dado $\vec{x} \in \vec{E}$, sean $\vec{x}_1 \in \vec{S}_1, \vec{x}_2 \in \vec{S}_2$ tales que $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$. Como $\vec{S}_1$ y $\vec{S}_2$ son ortogonales (ver definición 4.3.1), se tiene

$$\langle \vec{x} - \vec{x}_1, \vec{z}\rangle = 0 \quad \text{para todo } \vec{z} \in \vec{S}_1$$

y

$$\langle \vec{x} - \vec{x}_2, \vec{z}\rangle = 0 \quad \text{para todo } \vec{z} \in \vec{S}_2$$

lo que muestra, de acuerdo al teorema 4.3.2, que $\vec{x}_1 = \vec{p}_1(\vec{x})$ y $\vec{x}_2 = \vec{p}_2(\vec{x})$.

Definición 4.5.2: Se llama hiperplano en un e.v. $\vec{E}$ a todo subespacio vectorial $\vec{H}$ en $\vec{E}$ de codimensión 1. Esto significa que existe $\vec{a} \in \vec{E} \setminus \vec{H}$ tal que el subespacio vectorial de dimensión 1 generado por $\vec{a}$ y el subespacio vectorial $\vec{H}$ son suplementarios en $\vec{E}$.

Teorema 4.5.2: Sea ℓ una función lineal no nula de un e.v. $\vec{E}$ en $I\!R$. Entonces el subespacio vectorial $\vec{H} = \{\vec{x} \in \vec{E} : \ell(\vec{x}) = 0\}$ es un hiperplano en $\vec{E}$. Si $\vec{E}$ es un e.v.n. y si ℓ es continua, entonces $\vec{H}$ será un hiperplano cerrado.

Demostración: Sea $\vec{e} \in \vec{E}$ tal que $\ell(\vec{e}) \neq 0$ y definamos $\vec{a} = \frac{\vec{e}}{\ell(\vec{e})}$ (de modo que $\ell(\vec{a}) = 1$). Demostremos entonces que todo $\vec{x} \in \vec{E}$ se puede escribir $\vec{x} = \lambda\vec{a} + \vec{y}$ con $\lambda \in I\!R, \vec{y} \in \vec{H}$. Pero esto es evidente pues basta con definir $\lambda = \ell(\vec{x})$ e $\vec{y} = \vec{x} - \ell(\vec{x})\vec{a}$.
Es inmediato verificar que H es cerrado usando el teorema 1.4.1 que caracteriza los conjuntos cerrados mediante sucesiones y el teorema 2.3.1 que caracteriza las funciones continuas mediante sucesiones.

4.6 Tres Teoremas importantes

Teorema 4.6.1: (Teorema de representación de Riesz) Sea $\vec{E}$ un espacio de Hilbert y $\ell : \vec{E} \to I\!R$ una función lineal continua. Entonces existe $\vec{\omega} \in \vec{E}$ tal que

$$\ell(\vec{x}) = \langle \vec{\omega}, \vec{x} \rangle \quad \text{para todo} \quad \vec{x} \in \vec{E} \tag{4.6.1}$$

Demostración: Si ℓ es la función nula, se tendrá 4.6.1 con $\vec{\omega} = \vec{0}$. Supongamos ahora que ℓ no es la función nula. De acuerdo al teorema 4.5.2, $\vec{H} = \{\vec{x} \in \vec{E} : \ell(\vec{x}) = 0\}$ es un hiperplano cerrado. Entonces, si $\vec{a} \in \vec{E} \setminus \vec{H}$ y si $\vec{p}_1(\vec{a})$ es la proyección de $\vec{a}$ en $\vec{H}$, de acuerdo al teorema 4.3.2, el elemento $\vec{b} := \vec{a} - p_1(\vec{a})$ genera un subespacio de dimensión 1 ortogonal a $\vec{H}$. Del teorema 4.5.1, se tiene

$$\vec{x} = \vec{p}_1(\vec{x}) + \vec{p}_2(\vec{x}) \quad \text{para todo} \quad \vec{x} \in \vec{E} \tag{$*$}$$

donde $\vec{p}_1(\vec{x})$ es la proyección de $\vec{x}$ en el espacio generado por $\vec{b}$ y $\vec{p}_2(\vec{x})$ la proyección de $\vec{x}$ sobre $\vec{H}$. Del teorema 3.4.3 vemos que $\vec{p}_1(\vec{x}) = \langle \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}, \vec{x} \rangle \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$ por lo tanto, definiendo $\vec{\omega} := \ell(\frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|})\frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$ obtenemos, a partir de $(*)$, la fórmula 4.6.1.

Teorema 4.6.2: (Teorema de separación de Hanh-Banach) Sea C una parte convexa cerrada de un espacio de Hilbert $\vec{E}$ que no contiene al origen. Existe entonces una función lineal continua $\ell : \vec{E} \to I\!R$ y $\alpha > 0$ tales que

$$\ell(\vec{x}) \geq \alpha \quad \text{para todo} \quad \vec{x} \in C \tag{4.6.2}$$

Demostración: Sea $\vec{p} \in C$ la proyección de $\vec{0}$ sobre C, cuya existencia está garantizada por el teorema 4.2.1. Del teorema 4.3.1 sabemos que

$$\langle -\vec{p}, \vec{x} - \vec{p} \rangle \leq 0 \quad \text{para todo} \quad \vec{x} \in C$$

es decir

$$\langle \vec{p}, \vec{x} \rangle \geq ||\vec{p}||^2 \quad \text{para todo} \quad \vec{x} \in C$$

Definiendo $\alpha := ||\vec{p}||^2 > 0$ y $\ell : E \to I\!R$ por $\ell(\vec{x}) := \langle \vec{p}, \vec{x} \rangle$, del teorema 4.1.2 vemos que ℓ es una función lineal continua que verifica 4.6.2.

Nota 4.6.1: Si C es un convexo cerrado de un espacio de Hilbert $\vec{E}$ y $\vec{a} \notin C$, aplicando el teorema anterior es fácil ver que existe una función lineal afín continua $h : \vec{E} \to I\!R$ y $\alpha > 0$ tales que

$$h(\vec{a}) = 0 \quad \text{y} \quad h(\vec{x}) \geq \alpha \quad \text{para todo} \quad \vec{x} \in C \qquad 4.6.3$$

En efecto, si definimos $C' = C - \{a\} := \{\vec{x}' \in \vec{E} : \vec{x}' = \vec{x} - \vec{a}$ para algún $\vec{x} \in C\}$, puesto que $0 \notin C'$ debe existir $\ell \in \mathcal{L}(\vec{E}, I\!R)$ y $\alpha > 0$ tales que $\ell(\vec{x}) \geq \alpha$ para todo $\vec{x}' \in C'$. Definiendo entonces $h(\vec{x}) := \ell(\vec{x}) - \ell(\vec{a})$, se obtiene 4.6.3

Teorema 4.6.3: (Lema de Farkas) Dadas $n+1$ funciones lineales continuas $\ell_0, \ell_1, ..., \ell_n$ definidas en un espacio de Hilbert $\vec{E}$ con valores en $I\!R$, la inclusión

$$\{\vec{x} \in \vec{E} : \ell_i(\vec{x}) \leq 0 \quad \text{para todo} \quad i : 1...n\} \subset \{\vec{x} \in \vec{E} : \ell_0(\vec{x}) \leq 0\} \qquad 4.6.4$$

implica la existencia de escalares $\lambda_1 \geq 0, ..., \lambda_n \geq 0$ tales que

$$\ell_0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ell_i \qquad 4.6.5$$

Demostración: Del teorema 4.6.1 sabemos que existen $\vec{\omega}_0, \vec{\omega}_1, ..., \vec{\omega}_n \in \vec{E}$ tales que $\ell_i(\vec{x}) = \langle \vec{\omega}_i, \vec{x} \rangle$ para todo $\vec{x} \in \vec{E}$ y todo $i : 1...n$. Si definimos el convexo

$$C := \{\vec{x} \in \vec{E} : \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{\omega}_i \quad \text{con} \quad \lambda_i \geq 0 \quad \text{para todo} \quad i : 1...n\}$$

4.6.5 equivale a demostrar que $\vec{\omega}_0 \in C$. Como C es un convexo cerrado (ver nota 4.6.2), de acuerdo al teorema 4.2.1 esto equivale a demostrar que la proyección $\vec{p}(\vec{\omega}_0)$ de $\vec{\omega}_0$

sobre C es igual a $\vec{\omega}_0$. Escribamos $\vec{p}(\vec{\omega}_0) = \Sigma\bar{\lambda}_i\vec{\omega}_i$ con $\bar{\lambda}_i \geq 0$ para todo $i : 1, ..., n$. Del Teorema 4.3.1 sabemos que $\langle\vec{\omega}_0 - \vec{p}(\vec{\omega}_0), \vec{x} - \vec{p}(\vec{\omega}_0)\rangle \leq 0$ para todo $\vec{x} \in C$ y, aplicando esta desigualdad a $\vec{x}_j := p(\vec{\omega}_0) + \vec{\omega}_j \in C$ obtenemos

$$\langle\vec{\omega}_0 - \vec{p}(\vec{\omega}_0), \vec{\omega}_j\rangle \leq 0 \quad \text{para todo} \quad j : 1, ..., n$$

es decir, $\ell_j(\vec{\omega}_0 - \vec{p}(\vec{\omega}_0)) \leq 0$ para todo $j : 1, ..., n$. De 4.6.4 podemos concluir que

$$\langle\vec{\omega}_0 - \vec{p}(\vec{\omega}_0), \vec{\omega}_0\rangle \leq 0 \tag{$*$}$$

Por otra parte, como $\vec{0} \in C$, se tiene que $\langle\vec{\omega}_0 - \vec{p}(\vec{\omega}_0), -\vec{p}(\vec{\omega}_0)\rangle \leq 0$ y sumándole la desigualdad $(*)$ vemos que $\|\vec{\omega}_0 - \vec{p}(\vec{\omega}_0)\|^2 \leq 0$ lo que muestra que $\vec{\omega}_0 = \vec{p}(\vec{\omega}_0)$.

Nota 4.6.2: Probar que el conjunto C de la demostración del teorema anterior, es cerrado, es fácil si los vectores $\vec{\omega}_1, ..., \vec{\omega}_n$ son linealmente independientes. Sin la hipótesis de independencia lineal, la dificultad aumenta.

4.7 Ejercicios

1. Demueste que la norma en un espacio de Hilbert verifica la igualdad

$$\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = 2(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2) \quad \text{para todo} \quad \vec{x}, \vec{y}$$

2. Demuestre que si $\vec{E}$ es un e.v.n. cuya norma verifica la igualdad del ejercicio 1, entonces la función $b : E \times E \to E$ definida por

$$b(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{4}(\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2)$$

   es un producto interno. Demuestre entonces que $\vec{E}$ es un espacio de Hilbert.

3. Dado un punto $\vec{b}$ en un espacio de Hilbert $\vec{E}$, demuestre que $\| < \vec{b}, \cdot > \| = \|\vec{b}\|$ (la primera norma es la de $\mathcal{L}(\vec{E}, I\!R)$ y la segunda la de $\vec{E}$).

4. Demuestre que la proyección en un espacio de Hilbert $\vec{E}$, de un punto $\vec{a}$, sobre la bola cerrada $B(\vec{c}, 1)$ (suponiendo que $\vec{a} \notin B(\vec{c}, 1)$), está dada por $\vec{p}(\vec{a}) = \vec{c} + \frac{\vec{a} - \vec{c}}{\|\vec{a} - \vec{c}\|}$.

5. Calcule en $I\!R^3$, dotado de la norma $\| \; \|_2$, la proyección del punto (1,2,3) sobre el plano de ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Calcule la proyección del mismo punto sobre el plano afín de ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.