III. ESPACIOS DE FUNCIONES

3.0 Introducción

Todos los e.v. de dimensión infinita que intervienen en los modelos matemáticos de la ingeniería y de la física, son espacios de funciones: el e.v. de las funciones acotadas, el e.v. de las funciones continuas, el e.v. de las funciones diferenciables, etc.
En este capítulo veremos las propiedades más elementales de este tipo de espacios vectoriales, dotados de la norma $\| \|_\infty$ que definimos en 1.1.11.

Los tres resultados importantes del capítulo están en el teorema 3.1.1 que nos dice cuando el e.v. $\mathcal{A}(A, \vec{F})$ (de las funciones acotadas de A en $\vec{F}$) dotado de la norma $\| \|_\infty$ es un espacio de Banach, en el teorema 3.3.1 que nos muestra que en el e.v. $\mathcal{A}(A, \vec{F})$ dotado de la norma $\| \|_\infty$ el subespacio $\mathcal{C}(A, \vec{F})$ (de las funciones continuas de A en $\vec{F}$) es cerrado y, finalmente en el teorema 3.5.1 que nos dice que para toda función en $\mathcal{C}([a, b], I\!R)$ se puede construir una sucesión de polinomios convergente, para la norma $\| \|_\infty$, a esa función.

3.1 Espacio vectorial normado de las funciones acotadas

Definición 3.1.1: Dado un conjunto A y un e.v.n. $\vec{F}$ denotaremos por $\mathcal{A}(A, \vec{F})$ al espacio vectorial de las funciones acotadas de A en $\vec{F}$ ($f \in \mathcal{A}(A, \vec{F})$ si existe r tal que $\|f(x)\| \leq r$ para todo $x \in A$) y, lo dotaremos de la norma $\| \|_\infty$ definida por

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in A} \|f(x)\| \qquad 3.1.1$$

Nota 3.1.1: Como decíamos, cuando estudiábamos el e.v.n. $\mathcal{L}(\vec{E}, \vec{F})$, dada la importancia que tienen en un e.v.n. las sucesiones de Cauchy, una pregunta fundamental que se debe hacer frente a un e.v.n. de dimensión infinita, es si será o no un espacio de Banach (ver definición 1.5.2). El teorema que sigue da una respuesta satisfactoria a esta pregunta.

Teorema 3.1.1: Si $\vec{F}$ es un espacio de Banach, entonces $\mathcal{A}(A, \vec{F})$ dotado de la norma $\| \|_\infty$ también lo es.

Demostración: Sea $\{f_k\}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{A}(A, \vec{F})$. Como para todo $x \in A$ se tiene la desigualdad $\|f_k(x) - f_j(x)\| \leq \|f_k - f_j\|_\infty$, es evidente que para cada $x \in A$

la sucesión $\{f_k(x)\}$ es de Cauchy en $\vec{F}$ y, como por hipótesis $\vec{F}$ es un espacio de Banach, ella será convergente. Definamos entonces la aplicación $f : A \to \vec{F}$ por la relación $f(x) = \lim f_k(x)$ e intentemos demostrar que $\{f_k\}$ converge a f en el e.v.n. $\mathcal{A}(A, \vec{F})$. Lo primero que debemos hacer es demostrar que $f \in \mathcal{A}(A, \vec{F})$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $K \in I\!N$ tal que $\|f_k - f_j\|_\infty \leq \varepsilon$ para todo $k, j \geq K$, lo que equivale a decir que:

$$\|f_k(x) - f_j(x)\| \leq \varepsilon \text{ para todo } x \in A \text{ y todo } k, j \geq K \tag{$*$}$$

Como para k y x fijos, la función $y \in \vec{F} \to \|f_k(x) - y\|$ es continua, del teorema 2.3.1 obtenemos

$$\lim_j \|f_k(x) - f_j(x)\| = \|f_k(x) - \lim_j f_j(x)\| = \|f_k(x) - f(x)\|$$

Tomando límite sobre j en (*), la igualdad anterior nos permite concluir que

$$\|f_k(x) - f(x)\| \leq \varepsilon \quad \text{para todo } x \in A \text{ y todo } k \geq K \tag{$**$}$$

y como $f_k \in \mathcal{A}(A, \vec{F})$, para todo $x \in A$ tendremos

$$\|f(x)\| - \|f_k\|_\infty \leq \|f(x)\| - \|f_k(x)\| \leq \|f(x) - f_k(x)\| \leq \varepsilon$$

es decir

$$\|f(x)\| \leq \varepsilon + \|f_k\|_\infty \quad \text{para todo} \quad x \in A$$

lo que muestra que f es acotada.

El resto de la demostración esta ya practicamente hecha, en efecto, (**) es equivalente a

$$\|f_k - f\|_\infty \leq \varepsilon \text{ para todo } k \geq K$$

lo que muestra que $\{f_k\}$ converge a f.

Nota 3.1.2: Un espacio de funciones particularmente importante es el de las funciones continuas definidas en una parte compacta A de un e.v.n. $\vec{E}$, con valores en $I\!R^m$. Este espacio de funciones lo denotaremos $\mathcal{C}(A, I\!R^m)$. Del teorema 2.5.1 y del teorema 1.6.2 concluimos que $\mathcal{C}(A, I\!R^m)$ es un subespacio vectorial del e.v. $\mathcal{A}(A, I\!R^m)$. Usando entonces el teorema anterior y el teorema 3.3.1 que veremos más adelante, concluiremos que $\mathcal{C}(A, I\!R^m)$, dotado de la norma $\| \ \|_\infty$, es también un espacio de Banach.

3.2 Convergencia uniforme y convergencia simple de una sucesión de funciones

Definición 3.2.1: La convergencia de una sucesión de funciones en el e.v.n. $\mathcal{A}(A, \vec{F})$, definida en la sección anterior, se llama convergencia uniforme de la sucesión. Así entonces, decimos que $\{f_k\}$ converge uniformemente a la función f, cuando $\|f_k - f\|_\infty \to 0$.

Nota 3.2.1: El propósito de esta sección es ver que relación existe entre la convergencia de una sucesión $\{f_k\}$ en $\mathcal{A}(A, \vec{F})$ dotado de la norma $\| \ \|_\infty$ (que hemos llamado convergencia uniforme de $\{f_k\}$) y, la convergencia en el e.v.n $\vec{F}$ de la sucesión $\{f_k(x)\}$ donde x está fijo (que llamaremos convergencia simple o puntual de $\{f_k\}$).

Definición 3.2.2: Dada una sucesión $\{f_k\}$ de funciones definidas en un conjunto A con valores en un e.v.n. $\vec{F}$, diremos que $\{f_k\}$ converge simplemente o puntualmente a una función $f : A \to \vec{F}$ si para todo $x \in A$ la sucesión $\{f_k(x)\}$ converge a $f(x)$ en $\vec{F}$.

Nota 3.2.2: Dada una sucesión $\{f_k\}$ en $\mathcal{A}(A, \vec{F})$ convergente uniformemente a f, puesto que para todo $k \in I\!N$ y todo $x \in A$ se tiene que $\|f_k(x) - f(x)\| \leq \|f_k - f\|_\infty$, es evidente que $\{f_k\}$ converge simplemente a f. Decimos entonces que la convergencia uniforme implica la convergencia simple. Lo contrario no es verdadero. Los dos ejemplos que siguen ilustran bien este hecho negativo y, permiten al mismo tiempo comprender mejor la convergencia uniforme.

Ejemplo 3.2.1: En el e.v. $\mathcal{A}(I\!R, I\!R)$ definamos la sucesión $\{f_k\}$ por

$$f_k(x) = \frac{1}{1 + (x - k)^2} \qquad 3.2.1$$

Entonces, como para todo $x \in I\!R$ se tiene que $\lim f_k(x) = 0$ concluimos que la sucesión $\{f_k\}$ converge simplemente a la función nula $f(x) = 0$ para todo $x \in I\!R$. En la nota anterior veíamos que la convergencia uniforme de una sucesión de funciones implica su convergencia simple, por lo tanto si $\{f_k\}$ fuera uniformemente convergente debería serlo a la función nula. Veamos si esto es cierto, para lo cual hay que estudiar la sucesión $\|f_k - f\|_\infty$ (donde f es la función nula). Como

$$\|f_k - f\|_\infty = \sup_{x \in I\!R} |f_k(x)| = 1 \quad \text{para todo} \quad k \in I\!N$$

concluimos que $\{f_k\}$ no converge uniformemente.

Ejemplo 3.2.2: En el e.v. $\mathcal{A}(I\!R, I\!R)$ definamos la sucesión $\{f_k\}$ por

$$f_k(x) = \begin{cases} k^2 x & \text{si } x \in [0, 1/k] \\ -k^2 x + 2k & \text{si } x \in [1/k, 2/k] \\ 0 & \text{si } x \notin [0, 2/k] \end{cases} \tag{3.2.2}$$

Entonces, como para todo $x \in I\!R$ se tiene que $\lim_k f_k(x) = 0$, concluimos que la sucesión $\{f_k\}$ converge simplemente a la función nula. Siguiendo entonces el mismo razonamiento del ejemplo anterior para ver si $\{f_k\}$ converge uniformemente, obtenemos

$$\|f_k - f\|_\infty = \sup_{x \in I\!R} |f_k(x)| = k$$

y concluimos que $\{f_k\}$ no converge uniformemente.

Nota 3.2.3: Observando bien los gráficos de las funciones f_k en cada uno de los dos ejemplos anteriores, vemos que la convergencia uniforme corresponde bien a nuestra noción intuitiva de convergencia de una sucesión y, que lo que hemos llamado convergencia simple no es una "verdadera convergencia".

3.3 Continuidad del límite de una sucesión de funciones continuas

Teorema 3.3.1: Sean $\vec{E}$ y $\vec{F}$ dos e.v.n. y sea A un subconjunto de $\vec{E}$. Si $\{f_k\}$ es una sucesión de funciones continuas en $\mathcal{A}(A, \vec{F})$ convergente uniformemente a una función f, entonces f también es continua.

Demostración: Dado $\vec{a} \in A$, debemos demostrar que el límite f de la sucesión $\{f_k\}$ es una función continua en $\vec{a}$. Dado $\varepsilon > 0$, puesto que $\{f_k\}$ converge uniformemente a f existe $K \in I\!N$ tal que

$$\|f_k(\vec{x}) - f(\vec{x})\| \leq \varepsilon/3 \quad \text{para todo } \vec{x} \in A \quad \text{y todo } k \geq K \tag{$*$}$$

Por otra parte, puesto que f_K es una función continua en $\vec{a}$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|f_K(\vec{x}) - f_K(\vec{a})\| \leq \varepsilon/3 \quad \text{para todo } x \in B(\vec{a}, \delta) \cap A \tag{$**$}$$

De las desigualdades (*) y (**) concluimos que

$$\|f(\vec{x})-f(\vec{a})\| \leq \|f(\vec{x})-f_K(\vec{x})\|+\|f_K(\vec{x})-f_K(\vec{a})\|+\|f_K(\vec{a})-f(\vec{a})\| \leq \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

para todo $x \in B(\vec{a},\delta)\cap A$. Queda así demostrada la continuidad de f en $\vec{a}$.

Nota 3.3.1: El teorema 1 se enuncia usualmente diciendo que el límite uniforme de una sucesión de funciones continuas es una función continua.

Nota 3.3.2: El ejemplo que sigue muestra que el límite simple de una sucesión de funciones continuas, no es necesariamente una función continua. En ese caso, de acuerdo al teorema anterior, la sucesión no converge uniformemente.

Ejemplo 3.3.1: Consideremos en $\mathcal{A}([0,1],\mathbb{R})$ la sucesión de funciones continuas $f_k(x)=x^k$. Es fácil verificar que esta sucesión converge simplemente a la función $f(x)=0$ si $x\in[0,1[$ y $f(1)=1$, que no es continua. Usando el teorema anterior deducimos también que esta sucesión $\{f_k\}$ no puede converger uniformemente.

Nota 3.3.3: El siguiente teorema repite casi exactamente lo que decíamos al final de la nota 3.1.2.

Teorema 3.3.2: El e.v. $\mathcal{C}(A,\vec{F})$ de las funciones continuas definidas en una parte compacta A de un e.v.n., con valores en un espacio de Banach $\vec{F}$, es un subespacio vectorial cerrado del e.v.n. $(\mathcal{A}(A,\vec{F}),\|\ \|_\infty)$ y, dotado de la misma norma $\|\ \|_\infty$, es un espacio de Banach.

3.4 Cuatro contraejemplos interesantes

Contraejemplo 3.4.1: En la nota 1.1.3 decíamos que todas las normas, que se pueden definir en un e.v.n. de dimensión finita, son equivalentes. Veremos aquí dos normas definidas en un mismo e.v., que no son equivalentes. Consideremos el e.v. $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ de las funciones continuas en $[a,b]$ con valores en $\mathbb{R}$, la norma $\| \|_\infty$ que ya conocemos bien y, la norma:

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)|dx \tag{3.4.1}$$

Verifiquemos que estas dos normas no son equivalentes. Si bien es cierto que

$$\|f\|_1 \leq (b-a)\|f\|_\infty \quad \text{para todo} \quad f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}), \tag{3.4.2}$$

probaremos que no exite L tal que $\| \|_\infty \leq L\| \|_1$. Lo que es equivalente a demostrar que

para todo k existe una función $f_k \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ que verifica $\|f_k\|_\infty \geq k\|f_k\|_1$.

Si consideramos las funciones definidas en 3.2.2, vemos que $\|f_k\|_\infty = k$ y $\|f_k\|_1 = 1$ y por lo tanto, ellas verifican la última desigualdad.
Para captar cuan diferentes son estas dos normas en el e.v. $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ será interesante ver el contraejemplo 3.4.3 donde estudiaremos una sucesión $\{f_k\}$ que converge para la norma $\| \|_1$ y no converge para la norma $\| \|_\infty$. Otra diferencia importante entre estas dos normas la constituye el hecho que, de acuerdo al teorema 3.3.2, $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ dotado de la norma $\| \|_\infty$ es un espacio de Banach y, como veremos al final del contraejemplo siguiente, dotado de la norma $\| \|_1$ no es un espacio de Banach.

Contraejemplo 3.4.2: El teorema 1.5.2 nos decía que en un e.v.n. de dimensión finita toda sucesión de Cauchy es convergente. Veremos aquí un e.v.n. (de dimensión infinita) donde hay sucesiones de Cauchy que no convergen. Consideremos el e.v. $\mathcal{C}_0([-1,1],\mathbb{R})$ de las funciones continuas de $[-1,1]$ en $\mathbb{R}$, que se anulan en -1 y 1 dotado de la norma $\| \|_1$ definida en 3.4.1 y consideremos en este e.v.n. la sucesión $f_k(x) = 1 - x^{2k}$. Puesto que $\|f_k - f_j\|_1 = |\frac{2}{2k+1} - \frac{2}{2j+1}|$, dado $\varepsilon > 0$, si definimos $K \geq \frac{1}{\varepsilon}$, obtenemos que $\|f_k - f_j\|_1 \leq \varepsilon$ para todo $k, j \geq K$ lo que muestra que $\{f_k\}$ es una sucesión de Cauchy. Para demostrar que esta sucesión no es convergente consideremos el e.v. $\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ del cual $\mathcal{C}_0([-1,1],\mathbb{R})$ es un sub e.v. y dotémoslo de la misma norma. Es evidente entonces que si $\{f_k\}$ converge a una función f en el e.v.n. $\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$, y a una función f' en el e.v.n. $\mathcal{C}_0([-1,1],\mathbb{R})$ entonces, $f = f'$. Ahora bien, es fácil verificar que $\{f_k\}$ converge en $\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ a la función constante $f(x) = 1$, y como esta función no pertenece a $\mathcal{C}_0([-1,1],\mathbb{R})$ concluimos que en este último e.v.n. la sucesión en cuestión no converge.

El e.v. $\mathcal{C}([-1,1],I\!R)$ dotado de la norma $\| \ \|_1$ tampoco es un espacio de Banach, como lo muestra la sucesión $\{f_k\}$ definida por $f_k(x) = \sqrt[2k+1]{x}$, que es de Cauchy y no es convergente.

Contraejemplo 3.4.3: Los teoremas 1.6.2 y 1.6.3 de la sección 1.6 nos mostraban que en un e.v.n. de dimensión finita los conjuntos compactos son los cerrados y acotados, por lo tanto las bolas son siempre conjuntos compactos. Veremos aquí un ejemplo de e.v.n. cuyas bolas no son compactas. El ejemplo está dado en $\mathcal{C}([0,1],I\!R)$ dotado de la norma $\| \ \|_\infty$. Demostremos entonces que la bola con centro en la función nula y radio 1, $B(0,1) = \{f \in \mathcal{C}([0,1],I\!R) : \ \|f\|_\infty \leq 1\}$, no es compacta a pesar de ser un conjunto cerrado y acotado. Para esto basta considerar la sucesión $\{f_k\}$, definida por $f_k(x) = x^k$, que está en $B(0,1)$ (en efecto, $\|f_k\|_\infty = 1$) y no tiene ninguna subsucesión convergente. Para verificar que $\{f_k\}$ no tiene subsucesiones convergentes basta ver que ella, y todas sus subsucesiones, convergen simplemente a la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

que por ser discontinua, deja en evidencia de acuerdo al teorema 3.3.1, que $\{f_k\}$ no tiene subsucesiones uniformemente convergentes.
Es interesante notar que esta sucesión de funciones es convergente a la función nula si dotamos al espacio $\mathcal{C}([0,1],I\!R)$ de la norma 3.4.1, en efecto $\|f_k\|_1 = 1/(k+1)$. Este hecho constituye otra forma de ver que estas dos normas no son equivalentes.
En general, se puede demostrar que en un e.v.n. de dimensión infinita, las bolas no son jamás compactas. Esta propiedad negativa de las bolas es lamentable.

Contraejemplo 3.4.4: El teorema 2.7.4 nos decía que toda función lineal definida en un e.v.n. de dimensión finita, con valores en un e.v.n. $\vec{F}$ es continua. Veremos aquí una función lineal definida en un e.v.n. (de dimensión infinita) con valores en $I\!R$, que no es continua. Sea $\mathcal{P}$ el e.v. de los polinonios de una variable real dotado de la norma

$$\|p\| = \max_{x \in [0,1]} |p(x)|. \qquad 3.4.3$$

No es difícil verificar que es una norma en $\mathcal{P}$. Consideremos entonces la función lineal $\ell : \mathcal{P} \to I\!R$ definida por $\ell(p) = p(3)$ y demostremos que ella no es continua en 0 (polinomio nulo). Para esto, tomemos en $\mathcal{P}$ la sucesión $p_k(x) = (\frac{x}{2})^k$. Como $\|p_k\| = 2^{-k}$, vemos que se trata de una sucesión convergente a 0. Si ℓ fuera continua, de acuerdo al teorema 2.3.1 debería tenerse que $\lim \ell(p_k) = \ell(0) = 0$, pero esto no se tiene pues $\ell(p_k) = p_k(3) = (\frac{3}{2})^k$, lo que muestra que ℓ no es continua.

3.5 Teorema de Weierstrass-Stone

Nota 3.5.1: Weierstrass demostró el año 1885 que toda función $f \in \mathcal{C}([a,b], I\!R)$ puede aproximarse tanto como se quiera por un polinomio, esto es, dado $\varepsilon > 0$ existe un polinomio p tal que $\|p - f\|_\infty \leq \varepsilon$. La demostración que daremos de este importante resultado fue hecha por Berstein el año 1912 y tiene la ventaja de ser constructiva. La demostración original de Weierstrass no es constructiva, es decir, dada la función f demuestra que existe una sucesión de polinomios $\{p_k\}$ convergente uniformemente a f, sin explicitar la forma de estos polinomios.

Definición 3.5.1: Dada una función $f \in \mathcal{C}([0,1], I\!R)$ se llama polinomio de Berstein de grado k asociado a la función f, al polinomio

$$b_k(x) := \sum_{i=0}^{k} f(\frac{i}{k}) p_{k,i}(x) \qquad 3.5.1$$

donde $p_{k,i}$ es el polinomio de grado k:

$$p_{k,i}(x) := \binom{k}{i} x^i (1-x)^{k-i} \qquad 3.5.2$$

Lema 3.5.1: Para todo $k \in I\!N$ los polinomios $p_{k,i}$ definidos por 3.5.2 verifican

i) $\sum\limits_{i=0}^{k} p_{k,i}(x) = 1$

ii) $\sum\limits_{i=0}^{k} \frac{i}{k} p_{k,i}(x) = x$

iii) $\sum\limits_{i=0}^{k} (\frac{i}{k} - x)^2 p_{k,i}(x) = \frac{x(1-x)}{k}$.

Demostración:

i) $\sum\limits_{i=0}^{k} p_{k,i}(x) = [x + (1-x)]^k = 1$

ii) $\sum\limits_{i=0}^{k} \frac{i}{k} p_{k,i}(x) = x \sum\limits_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} x^{i-1}(1-x)^{(k-1)-(i-1)}$

$= x \sum\limits_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} x^{j}(1-x)^{(k-1)-j}$

$= x[x+(1-x)]^{k-1} = x$

iii) $\sum\limits_{i=0}^{k} (\frac{i}{k} - x)^2 p_{k,i}(x) = \sum\limits_{i=0}^{k} \frac{i^2}{k^2} p_{k,i}(x) - 2x \sum\limits_{i=0}^{k} \frac{i}{k} p_{k,i}(x) + x^2 \sum\limits_{i=0}^{k} p_{k,i}(x).$

$= \sum\limits_{i=0}^{k} \frac{i(i-1)}{k^2} p_{k,i}(x) + \frac{1}{k} \sum\limits_{i=0}^{k} \frac{i}{k} p_{k,i}(x) - 2x^2 + x^2.$

$= x^2 \frac{k-1}{k} \sum\limits_{i=2}^{k} \binom{k-2}{i-2} x^{i-2}(1-x)^{(k-2)-(i-2)} + \frac{x}{k} - x^2.$

$= x^2 \frac{k-1}{k} \sum\limits_{j=0}^{k-2} \binom{k-2}{j} x^{j}(1-x)^{(k-2)-j} + \frac{x}{k} - x^2$

$= \frac{x-x^2}{k}$

Teorema 3.5.1: Dada una función $f \in \mathcal{C}([a,b], I\!R)$, existe una sucesión de polinomios convergente uniformemente a f.

Demostración: Para simplificar la demostración supondremos que $[a,b] = [0,1]$. Demostremos entonces que la sucesión de polinomios de Berstein $\{b_k\}$ asociados a la función f, converge uniformemente a f.

Dado $\varepsilon > 0$, debemos probar que existe $K \in I\!N$ tal que

$$||b_k - f||_\infty \leq \varepsilon \quad \text{para todo} \quad k \geq K.$$

Del Lema anterior i) vemos que para cada $x \in [0,1]$ y $k \in I\!N$ se tiene

$$\begin{aligned} |b_k(x) - f(x)| &= |\sum_{i=0}^{k} f(\frac{i}{k}) p_{k,i}(x) - f(x)| \\ &= |\sum_{i=0}^{k} f(\frac{i}{k}) p_{k,i}(x) - \sum_{i=0}^{k} f(x) p_{k,i}(x)| \\ &= |\sum_{i=0}^{k} p_{k,i}(x)(f(\frac{i}{k}) - f(x))| \\ &\leq \sum_{i=0}^{k} p_{k,i}(x)|f(\frac{i}{k}) - f(x)| \qquad (*) \end{aligned}$$

Debemos ahora acotar por ε esta última sumatoria. Para esto vamos a separar la suma en dos partes y, usando argumentos distintos, vamos a acotar por $\varepsilon/2$ cada una de ellas.

Del teorema 2.6.1 sabemos que f es uniformemente continua en $[0,1]$, por lo tanto existe $\delta > 0$ tal que

$$|x' - x| \leq \delta \Rightarrow |f(x') - f(x)| \leq \varepsilon/2$$

y así, del lema anterior i), obtenemos para cada $x \in [0,1]$ y $k \in I\!N$

$$\sum_{i \in I_k(x)} p_{k,i}(x)|f(\frac{i}{k}) - f(x)| \leq \varepsilon/2 \qquad (**)$$

donde $I_k(x) = \{i \leq k : |\frac{i}{k} - x| \leq \delta\}$.

Consideremos ahora el complemento $I_k^c(x)$ del conjunto $I_k(x)$, es decir, el conjunto de índices $I_k^c(x) = \{i \leq k : |\frac{i}{k} - x| > \delta\}$.
Usando la desigualdad $|f(\frac{i}{k}) - f(x)| \leq 2\|f\|_\infty$ para todo $i \leq k$ y, la desigualdad $\frac{1}{\delta^2}(\frac{i}{k} - x)^2 > 1$ para todo $i \in I_k^c(x)$, vemos que

$$\begin{aligned}\sum_{i \in I_k^c(x)} p_{k,i}(x)|f(\frac{i}{k}) - f(x)| &\leq 2\|f\|_\infty \sum_{i \in I_k^c(x)} p_{k,i}(x) \\ &\leq 2\|f\|_\infty \frac{1}{\delta^2} \sum_{i \in I_k^c(x)} (\frac{i}{k} - x)^2 p_{k,i}(x)\end{aligned}$$

y usando ahora el lema anterior iii) obtenemos

$$\begin{aligned}\sum_{i \in I_k^c(x)} p_{k,i}(x)|f(\frac{i}{k}) - f(x)| &\leq \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2} \frac{x(1-x)}{k} \\ &\leq \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2 k} \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para todo } \ k \geq K \qquad (***)\end{aligned}$$

donde K es un entero que verifica $K \geq \frac{4\|f\|_\infty}{\delta^2 \varepsilon}$. De las desigualdades (*), (**) y (***) se obtiene la desigualdad

$$|b_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \text{para todo } \ k \geq K \text{ y todo } x \in [0,1]$$

y, tomando supremo sobre x, concluimos que

$$\|b_k - f\|_\infty \leq \varepsilon \quad \text{para todo } \ k \geq K$$

Nota 3.5.2: En el contraejemplo 3.4.2 construimos en un e.v.n. una sucesión de Cauchy que no era convergente. El teorema de Weierstrass-Stone nos muestra que en el e.v. de los polinomios de una variable real definidos en $[0,1]$, dotado de la norma $\| \|_\infty$, es fácil construir sucesiones de Cauchy que no convergen. Basta para esto tomar una función continua f de $[0,1]$ en $I\!R$ que no sea un polinomio y considerar la sucesión de polinomios $\{b_k\}$ definida en 3.5.1. Esta sucesión será convergente en $\mathcal{C}([0,1], I\!R)$ dotado de la norma $\| \|_\infty$, a la función f y, como f no es un polinomio vemos que en el e.v. de los polinomios, dotado de la norma $\| \|_\infty$, $\{b_k\}$ será de Cauchy pero no convergente.

3.6 Ejercicios

1. Estudiar la convergencia puntual, la convergencia uniforme y la convergencia para la norma $\| \|_1$, de las siguientes sucesiones de funciones en $\mathcal{C}([0,1], I\!R)$.
   i) $f_k(x) = \frac{sen kx}{k}$
   ii) $f_k(x) = xe^{-kx}$
   iii) $f_k(x) = \begin{cases} kx & \text{si } x \in [0, 1/k] \\ (kx)^{-1} & \text{si } x \in [1/k, 1] \end{cases}$
   iv) $f_k(x) = kxe^{-kx}$
   v) $f_k(x) = \frac{kx^2}{1+kx}$
   vi) $f_k(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in [0, 1-1/k] \\ kx-k & \text{si } x \in [1-1/k, 1+1/k] \\ 1 & \text{si } x \in [1+1/k, 2] \end{cases}$

2. Demuestre que si $\{f_k\}$ es una sucesión en $\mathcal{C}([a,b], I\!R)$ uniformemente convergente a una función f, entonces
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_k \int_a^b f_k(x)dx$$

3. Sean $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ dos sucesiones de funciones en $\mathcal{A}(A, I\!R)$ uniformemente convergentes a f y g respectivamente. Demuestre que la sucesión $\{h_n\}$ definida por $h_n := f_n \cdot g_n$ es uniformemente convergente a la función $h = f \cdot g$.

4. Sea $\vec{F}$ un e.v.n., $\{f_n\}$ una sucesión en $\mathcal{A}(A, \vec{F})$ uniformemente convergente a una función f y, $\{g_n\}$ una sucesión de funciones de A en $\vec{F}$ que verifican $\|f_n - g_n\|_\infty \to 0$. Demuestre que la sucesión $\{g_n\}$ está en $\mathcal{A}(A, \vec{F})$ y converge uniformemente a la función f.

5. Sea $\{p_n\}$ una sucesión de polinomios de una variable real definidos por la formula recurrente
$$p_1 = 0,\ \ p_{n+1}(x) = \frac{1}{2}(x + 2p_n(x) - p_n(x)^2)$$
Demuestre que para todo $x \in [0,1]$ y se tiene
$$0 \leq \sqrt{x} - p_n(x) \leq \frac{2\sqrt{x}}{2 + n\sqrt{x}}$$
y que la sucesión $\{p_n\}$ en $\mathcal{A}([0,1], I\!R)$ converge uniformemente a la función f definida por $f(x) = \sqrt{x}$.

6. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones monótonas definidas en un intervalo $[a,b]$ con valores en $I\!R$, convergente puntualmente a una función continua $f : [a,b] \to I\!R$. Demuestre que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f.