II. FUNCIONES DEFINIDAS EN UN E.V.N. $\vec{E}$ CON VALORES EN UN E.V.N. $\vec{F}$

2.0 Introducción

Este capítulo está completamente dedicado a estudiar la continuidad de las funciones definidas en un e.v.n. $\vec{E}$ con valores en un e.v.n. $\vec{F}$. Tal como se vió en el caso de funciones de una variable real, la continudad seguirá siendo el punto de partida del estudio de funciones, ahora definidas en un e.v.n.
Veremos también la noción de límite de una función que está íntimamente relacionada con la de continuidad. Luego estudiaremos algunas de las propiedades fundamentales de las funciones continuas definidas en un compacto. El teorema 2.5.2 es el de mayor importancia en esa sección.
En la sección 2.7 estudiaremos las funciones lineales continuas y analizaremos el primer espacio vectorial normado de dimensión no finita. El teorema 2.7.1 es el de mayor importancia en esa sección.
Para terminar el capítulo demostraremos una propiedad de las funciones continuas (el teorema del punto fijo) que constituye uno de los resultados más útiles de las matemáticas aplicadas.

2.1 Continuidad

Definición 2.1.1: Una función f definida en una parte A de un e.v.n. $\vec{E}$ con valores en un e.v.n. $\vec{F}$, se dirá continua en $\vec{a} \in A$ si para toda bola $B(f(\vec{a}), \varepsilon)$ existe una bola $B(\vec{a}, \delta)$ tal que

$$f[B(\vec{a}, \delta) \cap A] \subset B(f(\vec{a}), \varepsilon) \qquad 2.1.1$$

dicho en otras palabras, si

$$''\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \text{ tal que, } \vec{x} \in A \text{ y } \|\vec{x} - \vec{a}\| \leq \delta \Rightarrow \|f(\vec{x}) - f(\vec{a})\| \leq \varepsilon''$$

La función f se dirá continua si ella es continua en A.

Nota 2.1.1: Es fácil ver que si $f : A \to \vec{F}$ es continua en $\vec{a} \in A \subset \vec{E}$, entonces f sigue siendo continua en $\vec{a}$ si cambiamos la norma de $\vec{E}$ o la de $\vec{F}$ por otra equivalente.

Nota 2.1.2: Cuando $A = \vec{E}$ la inclusión en 2.1.1 se reduce a

$$f[B(\vec{a}, \delta)] \subset B(f(\vec{a}), \varepsilon) \qquad 2.1.2$$

y la continuidad de f en $\vec{a}$ se expresa diciendo

$$''\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \text{ tal que, } \|\vec{x} - \vec{a}\| \leq \delta \Rightarrow \|f(\vec{x}) - f(\vec{a})\| \leq \varepsilon''$$

Teorema 2.1.1: Si f y g son dos funciones definidas en una parte A de un e.v.n. $\vec{E}$ con valores en un e.v.n. $\vec{F}$, continuas en $\vec{a} \in A$, entonces las funciones $f + g$ y λf (con $\lambda \in I\!\!R$) también son continuas en $\vec{a}$.

Demostración: i) Dado $\varepsilon > 0$, si f y g son continuas en $\vec{a}$, existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que

$$\vec{x} \in A, \|\vec{x} - \vec{a}\| \leq \delta_1 \Rightarrow \|f(\vec{x}) - f(\vec{a})\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ y}$$

$$\vec{x} \in A, \|\vec{x} - \vec{a}\| \leq \delta_2 \Rightarrow \|g(\vec{x}) - g(\vec{a})\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Definiendo $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \vec{x} \in A, \|\vec{x} - \vec{a}\| \leq \delta \Rightarrow & \|(f+g)(\vec{x}) - (f+g)(\vec{a})\| \leq \\ & \|f(\vec{x}) - f(\vec{a})\| + \|g(\vec{x}) - g(\vec{a})\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Concluimos así que $f + g$ es una función continua en $\vec{a}$.

ii) Si $\lambda = 0$ el resultado es evidente. Supondremos entonces que $\lambda \neq 0$. Dado $\varepsilon > 0$ si f es continua en $\vec{a}$, existe $\delta > 0$ tal que: $\vec{x} \in A$, $\|\vec{x} - \vec{a}\| \leq \delta \Rightarrow \|f(\vec{x}) - f(\vec{a})\| \leq \varepsilon / |\lambda|$, que es equivalente a $\|\lambda f(\vec{x}) - \lambda f(\vec{a})\| \leq \varepsilon$. Concluimos así que la función λf es continua en $\vec{a}$.

Teorema 2.1.2: Dados tres e.v.n. $\vec{E}, \vec{F}, \vec{G}$, una parte A de $\vec{E}$ y dos funciones $f : A \to \vec{F}$ y $h : \vec{F} \to \vec{G}$ continuas en $\vec{a} \in A$ y $f(\vec{a}) \in \vec{F}$ respectivamente. Entonces la función $h \text{ o } f$ también es continua en $\vec{a}$.

Demostración: Dado $\varepsilon > 0$, por ser h continua en $f(\vec{a})$, existe $\eta > 0$ tal que

$$\|f(\vec{a}) - \vec{y}\| \leq \eta \Rightarrow \|h(f(\vec{a})) - h(\vec{y})\| \leq \varepsilon$$

y como f es continua en $\vec{a}$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\vec{x} \in A, \|\vec{a} - \vec{x}\| \leq \delta \Rightarrow \|f(\vec{a}) - f(\vec{x})\| \leq \eta$$

De estas dos implicaciones concluimos que

$$\vec{x} \in A, \|\vec{a} - \vec{x}\| \leq \delta \Rightarrow \|h(f(\vec{a})) - h(f(\vec{x}))\| \leq \varepsilon$$

es decir, que $h \circ f$ es continua en $\vec{a}$.

Teorema 2.1.3: Si f y g son dos funciones definidas en una parte A de un e.v.n. $\vec{E}$ con valores en $I\!R$, continuas en $\vec{a} \in A$, entonces las funciones $f \cdot g, 1/f$ (suponiendo $f(\vec{a}) \neq 0$) y $\max\{f, g\}$ siguen siendo continuas en $\vec{a}$.

Demostración: i) Como $f \cdot g = \frac{1}{2}[(f+g)^2 - f^2 - g^2]$, para demostrar la continuidad de $f \cdot g$ en $\vec{a}$, usando el teorema 2.1.1, sólo hay que demostrar que el cuadrado de una función continua en $\vec{a}$ sigue siendo una función continua en $\vec{a}$.

Mostremos que f^2 es continua en $\vec{a}$. Como f^2 es la composición de $f : A \to I\!R$ con $h : I\!R \to I\!R$, definida por $h(y) = y^2$, y como ambas funciones son continuas en $\vec{a}$ y $f(\vec{a})$ respectivamente, el teorema anterior nos muestra que f^2 es continua en $\vec{a}$.

ii) La continuidad de $1/f$ en $\vec{a}$, es también consecuencia del teorema anterior puesto que $1/f$ es la composición de $f : A \to I\!R$ con $h : I\!R \setminus \{0\} \to I\!R$, definida por $h(y) = y^{-1}$, que son continuas en $\vec{a}$ y $f(\vec{a})$ respectivamente.

iii) Dado $\varepsilon > 0$, existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que, $\vec{x} \in A, \|\vec{x} - \vec{a}\| \leq \delta_1 \Rightarrow |f(\vec{x}) - f(\vec{a})| \leq \varepsilon$ y, $\vec{x} \in A$, $\|\vec{x} - \vec{a}\| \leq \delta_2 \Rightarrow |g(\vec{x}) - g(\vec{a})| \leq \varepsilon$. De la desigualdad

$$|\max\{f(\vec{x}), g(\vec{x})\} - \max\{f(\vec{a}), g(\vec{a})\}| \leq \max\{|f(\vec{x}) - f(\vec{a})|, |g(\vec{x}) - g(\vec{a})|\}$$

definiendo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ obtenemos que

$$\vec{x} \in A, \|x - \vec{a}\| \leq \delta \Rightarrow |\max\{f(\vec{x}), g(\vec{x})\} - \max\{f(\vec{a}), g(\vec{a})\}| \leq \varepsilon$$

lo que demuestra que la función $\max\{f, g\}$ es continua en $\vec{a}$.

Teorema 2.1.4: La norma de un e.v.n. $\vec{E}$ es una función continua de $\vec{E}$ en $I\!R$.

Demostración: Es una consecuencia inmediata de la desigualdad

$$|\|\vec{x}\| - \|\vec{a}\|| \leq \|\vec{x} - \vec{a}\|$$

que es válida para todo $\vec{x}$ y todo $\vec{a}$ en $\vec{E}$.

Teorema 2.1.5: Sea A una parte de un e.v.n. $\vec{E}$ y d_A la función de $\vec{E}$ en $I\!R$ definida por

$$d_A(\vec{x}) := \inf\{\|\vec{x}-\vec{z}\| : \vec{z} \in A\} \qquad 2.1.3$$

Entonces d_A es una función continua, más aún, ella verifica

$$|d_A(\vec{x}) - d_A(\vec{x}\,')| \leq \|\vec{x}-\vec{x}\,'\| \;\text{ para todo } \vec{x}, \vec{x}\,' \in \vec{E} \qquad 2.1.4$$

A la cantidad $d_A(\vec{x})$ se le llama usualmente distancia de $\vec{x}$ al conjunto A y a d_A función distancia al conjunto A.

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$. Por definición de ínfimo, para todo $\vec{x}\,' \in \vec{E}$ debe existir $\vec{z} \in A$ tal que $\|\vec{x}\,'-\vec{z}\| \leq d_A(\vec{x}\,') + \varepsilon$. Por lo tanto, para todo $\vec{x}$ y todo $\vec{x}\,'$ se tendrá

$$d_A(\vec{x}) \leq \|\vec{x}-\vec{z}\| \leq \|\vec{x}-\vec{x}\,'\| + \|\vec{x}\,'-\vec{z}\| \leq \|\vec{x}-\vec{x}\,'\| + d_A(\vec{x}\,') + \varepsilon$$

Como $\varepsilon > 0$ es cualquiera (tan pequeño como uno quiera) se tendrá

$$d_A(\vec{x}) - d_A(\vec{x}\,') \leq \|\vec{x}-\vec{x}\,'\| \quad \text{para todo } \vec{x}, \vec{x}\,' \in \vec{E}$$

e intercambiando $\vec{x}\,'$ con $\vec{x}$ se tiene

$$-(d_A(\vec{x}) - d_A(\vec{x}\,')) \leq \|\vec{x}-\vec{x}\,'\| \quad \text{para todo } \vec{x}, \vec{x}\,' \in \vec{E}$$

Estas dos últimas desigualdades son equivalentes a la desigualdad 2.1.4.

2.2 Límite de funciones y caracterización de la continuidad

Definición 2.2.1: Sea f una función definida en una parte A de un e.v.n. $\vec{E}$ con valores en un e.v.n. $\vec{F}$ y sea $\vec{a} \in \bar{A}$. Diremos que f tiende a $\vec{b} \in \vec{F}$ cuando $\vec{x}$ tiende a $\vec{a}$ en A si para toda bola $B(\vec{b}, \varepsilon)$ existe una bola $B(\vec{a}, \delta)$ tal que

$$f[B(\vec{a}, \delta) \cap A] \subset B(\vec{b}, \varepsilon) \qquad 2.2.1$$

dicho en otras palabras, si

$$''\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \text{ tal que }, \vec{x} \in A \text{ y } \|\vec{x}-\vec{a}\| \leq \delta \Rightarrow \|f(\vec{x}) - \vec{b}\| \leq \varepsilon \;\; ''$$

Escribiremos entonces $\lim\limits_{\substack{\vec{x}\to\vec{a}\\ x\in A}} f(\vec{x}) = \vec{b}$ y, en el caso en que $\vec{a} \in \overset{\circ}{A}$, escribiremos simplemente $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = \vec{b}$.

Teorema 2.2.1: Una función f definida en una parte A de un e.v.n. $\vec{E}$ con valores en un e.v.n. $\vec{F}$ será continua en $\vec{a} \in A$ si y solo si

$$\lim_{\substack{\vec{x}\to\vec{a}\\ \vec{x}\in A}} f(\vec{x}) = f(\vec{a}) \tag{2.2.2}$$

Demostración: Es una consecuencia inmediata de las definiciones 2.1.2 y 2.2.1.

Teorema 2.2.2: Sean f, g dos funciones definidas en una parte A de un e.v.n. $\vec{E}$ con valores en un e.v.n. $\vec{F}, \vec{a} \in \bar{A}$ y, $\lambda \in I\!R$. Si los límites de f y g cuando $\vec{x}$ tiende a $\vec{a}$ en A existen, entonces los límites de $f+g$ y λf cuando $\vec{x}$ tiende a $\vec{a}$ en A también existen y, se tienen las igualdades

$$\lim_{\substack{\vec{x}\to\vec{a}\\ \vec{x}\in A}} (f+g)(\vec{x}) = \lim_{\substack{\vec{x}\to\vec{a}\\ \vec{x}\in A}} f(\vec{x}) + \lim_{\substack{\vec{x}\to\vec{a}\\ \vec{x}\in A}} g(\vec{x}) \tag{2.2.3}$$

$$\lim_{\substack{\vec{x}\to\vec{a}\\ \vec{x}\in A}} \lambda f(\vec{x}) = \lambda \lim_{\substack{\vec{x}\to\vec{a}\\ \vec{x}\in A}} f(\vec{x}). \tag{2.2.4}$$

Demostración: La demostración es casi idéntica a la del teorema 2.1.1

Teorema 2.2.3: Dados tres e.v.n. $\vec{E}, \vec{F}, \vec{G}$, un subconjunto A en $\vec{E}, \vec{a} \in \bar{A}$, y dos funciones $f : A \to \vec{F}$ y $h : f(A) \to \vec{G}$. Si existen los límites

$$\lim_{\substack{\vec{x}\to\vec{a}\\ \vec{x}\in A}} f(\vec{x}) = \vec{\ell} \text{ y } \lim_{\substack{\vec{y}\to\vec{\ell}\\ \vec{y}\in f(A)}} h(\vec{y}) = \vec{m},$$

entonces el límite de $h \circ f$ cuando $\vec{x}$ tiende $\vec{a}$ en A también existe y se tiene

$$\lim_{\substack{\vec{x}\to\vec{a}\\ \vec{x}\in A}} (h\circ f)(\vec{x}) = \vec{m} \tag{2.2.5}$$

Demostración: La demostración es casi idéntica a la del teorema 2.1.2

Teorema 2.2.4: Sean f, g dos funciones definidas en una parte A de un e.v.n. $\vec{E}$ con valores en $I\!R$ y $\vec{a} \in \bar{A}$. Si los límites de f y g cuando $\vec{x}$ tiende a $\vec{a}$ en A existen, entonces los límites de $f \cdot g$ y de $1/f$ (suponiendo $\lim\limits_{x \to \vec{a}} f(\vec{x}) \neq 0$) cuando x tiende a $\vec{a}$ en A también existen y, se tienen las igualdades

$$\lim_{\substack{\vec{x} \to \vec{a} \\ \vec{x} \in A}} (f \cdot g)(\vec{x}) = \lim_{\substack{\vec{x} \to \vec{a} \\ \vec{x} \in A}} f(\vec{x}) \cdot \lim_{\substack{\vec{x} \to \vec{a} \\ \vec{x} \in A}} g(\vec{x}) \tag{2.2.6}$$

$$\lim_{\substack{\vec{x} \to \vec{a} \\ \vec{x} \in A}} (1/f)(\vec{x}) = 1/ \lim_{\substack{\vec{x} \to \vec{a} \\ \vec{x} \in A}} f(\vec{x}) \tag{2.2.7}$$

Demostración: La demostración es casi idéntica a la del teorema 2.1.3

2.3 Caracterización de la continuidad y el límite de una función mediante sucesiones

Teorema 2.3.1: Una función f definida en una parte A de un e.v.n. $\vec{E}$ con valores en un e.v.n. $\vec{F}$ será continua en $\vec{a} \in A$ si y solo si para toda sucesión $\{\vec{x}_k\}$ en A convergente a $\vec{a}$, la sucesión $\{f(\vec{x}_k)\}$ converge a $f(\vec{a})$, es decir

$$\lim_k f(\vec{x}_k) = f(\vec{a}) \qquad \text{para toda sucesión } \vec{x}_k \to \vec{a} \text{ en } A. \tag{2.3.1}$$

Demostración: i) Supongamos que f es continua en $\vec{a}$ y demostremos que se tiene 2.3.1. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\vec{x} \in A, \|\vec{x} - \vec{a}\| \leq \delta \Rightarrow \|f(\vec{x}) - f(\vec{a})\| \leq \varepsilon$$

y por otra parte, para toda sucesión $\{\vec{x}_k\}$ en A convergente a $\vec{a}$ debe existir $K \in I\!N$ tal que, $\|\vec{x}_k - \vec{a}\| \leq \delta \ \ \forall k \geq K$. Concluimos entonces que

$$\|f(\vec{x}_k) - f(\vec{a})\| \leq \varepsilon \ \ \forall k \geq K$$

lo que muestra que $\{f(\vec{x}_k)\}$ converge a $f(\vec{a})$.

ii) Supongamos ahora que para toda sucesión $\vec{x}_k \to \vec{a}$ en A se tiene que $f(\vec{x}_k) \to f(\vec{a})$. Si f no fuera continua en $\vec{a}$, existiría $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe $\vec{x}_\delta \in A$ que verifica

$$\|\vec{x}_\delta - \vec{a}\| \leq \delta \ \text{ y } \ \|f(\vec{x}_\delta) - f(\vec{a})\| > \varepsilon$$

Aplicando este razonamiento sucesivamente para $\delta = 1, 1/2, 1/3, ..., 1/k, ...$ concluimos que existiría una sucesión $\{\vec{x}_k\}$ en A que verifica:

$$\|\vec{x}_k - \vec{a}\| \leq 1/k \;\text{ y }\; \|f(\vec{x}_k) - f(\vec{a})\| > \varepsilon \quad \text{para todo} \quad k$$

lo que contradice la hipótesis pues $\vec{x}_k \to \vec{a}$ y $f(x_k) \not\to f(\vec{a})$. Esto muestra que f debe ser continua en $\vec{a}$.

Teorema 2.3.2: Una función f definida en una parte A de un e.v.n. $\vec{E}$ con valores en un e.v.n. $\vec{F}$, tiende a $\vec{b} \in \vec{F}$ cuando $\vec{x}$ tiende a $\vec{a} \in \bar{A}$ en A, si y solo si para toda sucesión $\{\vec{x}_k\}$ en A convergente a $\vec{a}$, la sucesión $\{f(\vec{x}_k)\}$ converge a $\vec{b}$.

Demostración: La demostración es casi identica a la del teorema anterior.

2.4 Funciones continuas con valores en $I\!R^m$

Definición 2.4.1: Dada una función f definida en una parte A de un e.v.n. $\vec{E}$ con valores en $I\!R^m$, es usual caracterizar f por sus m funciones componentes $f_1...f_m$ de A en $I\!R$, definidas de modo que para todo $\vec{x} \in A$ se tenga

$$f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), ..., f_m(\vec{x})) \qquad (\in I\!R^m)$$

La misma caracterización se usa cuando f toma sus valores en un e.v.n producto $\vec{F}_1 \times ... \times \vec{F}_m$ (ver ejemplo 1.1.5). En ese caso las m funciones componentes $f_1...f_m$ tendrán sus valores en $\vec{F}_1...\vec{F}_m$ respectivamente.

Teorema 2.4.1: Una función f definida en una parte de A de un e.v.n. $\vec{E}$ con valores en $I\!R^m$ será continua en $\vec{a} \in A$ si y solo si cada una de sus m funciones componentes $f_i : A \to I\!R$ es continua en $\vec{a} \in A$.

Demostración: De acuerdo a las notas 2.1.1 y 1.1.3, podemos usar en $I\!R^m$ cualquier norma. Usaremos entonces la norma $\|\cdot\|_\infty$.

i) Supongamos f continua en $\vec{a}$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\vec{x} \in A, \|\vec{x} - \vec{a}\| \leq \delta \Rightarrow \|f(\vec{x}) - f(\vec{a})\|_\infty \leq \varepsilon$$

lo que equivale a decir que para todo $i : 1...m$ se tiene

$$\vec{x} \in A, \|\vec{x} - \vec{a}\| \leq \delta \Rightarrow |f_i(\vec{x}) - f_i(\vec{a})| \leq \varepsilon$$

Esto demuestra que las funciones $f_1, ..., f_m$ son todas continuas en $\vec{a}$.

ii) Supongamos ahora que las funciones $f_1, ..., f_m$ son todas continuas en $\vec{a}$. Dado $\varepsilon > 0$, existen $\delta_1, ..., \delta_m > 0$ tales que para todo $i : 1...m$

$$\vec{x} \in A, \|\vec{x} - \vec{a}\| \leq \delta_i \Rightarrow |f_i(\vec{x}) - f_i(\vec{a})| \leq \varepsilon$$

Definiendo $\delta := \min\{\delta_1, ..., \delta_m\} > 0$ obtenemos para todo $i : 1...m$

$$\|\vec{x} - \vec{a}\| \leq \delta \Rightarrow |f_i(\vec{x}) - f_i(\vec{a})| \leq \varepsilon$$

lo que equivale a decir que

$$\|\vec{x} - \vec{a}\| \leq \delta \Rightarrow \|f(\vec{x}) - f(\vec{a})\|_\infty \leq \varepsilon$$

Esto demuestra la continuidad de f en $\vec{a}$.

Teorema 2.4.2: Una función f definida en una parte A de un e.v.n. $\vec{E}$ con valores en $I\!R^m$, tiende a $\vec{b} \in I\!R^m$ cuando $\vec{x}$ tiende a $\vec{a} \in \bar{A}$ en A, si y solo si cada una de las m componentes $f_i : A \to I\!R$ de la función f, tiende a la componente $b_i \in I\!R$ de $\vec{b}$ cuando $\vec{x}$ tiende a $\vec{a}$ en A. Esto lo escribimos

$$\lim_{\substack{\vec{x} \to \vec{a} \\ \vec{x} \in A}} f(\vec{x}) = (\lim_{\substack{\vec{x} \to \vec{a} \\ \vec{x} \in A}} f_1(\vec{x}), ..., \lim_{\substack{\vec{x} \to \vec{a} \\ \vec{x} \in A}} f_m(\vec{x})) \qquad 2.4.1$$

Demostración: La demostración es casi idéntica a la del teorema anterior.

Nota 2.4.1: Dados m e.v.n. $\vec{F}_1...\vec{F}_m$, los dos teoremas anteriores se generalizan fácilmente al caso en que f toma sus valores en el e.v.n. producto $\vec{F} := \vec{F}_1 \times ... \times \vec{F}_m$ (ver ejemplo 1.1.5 y nota 1.1.4).

2.5 Funciones continuas definidas en un compacto

Teorema 2.5.1: Si f es una función continua definida en una parte compacta A de un e.v.n. $\vec{E}$ con valores en un e.v.n. $\vec{F}$, entonces $f(A)$ es una parte compacta de $\vec{F}$.

Demostración: Sea $\{\vec{y}_k\}$ una sucesión en $f(A)$. Existe entonces para cada $\vec{y}_k$ un $\vec{x}_k \in A$ tal que $\vec{y}_k = f(\vec{x}_k)$. Como A es compacto, existe una subsucesión $\{\vec{x}_{\alpha(k)}\}$ convergente a un elemento $\vec{x}_0 \in A$ y, como f es continua en $\vec{x}_0$, la subsucesión $\{\vec{y}_{\alpha(k)}\}$ será convergente a $\vec{y}_0 := f(\vec{x}_0) \in f(A)$. Esto muestra que $f(A)$ es compacto.

Teorema 2.5.2: Si f es una función continua definida en una parte compacta A de un e.v.n. $\vec{E}$ con valores en $I\!R$, entonces f alcanza su máximo y su mínimo sobre A. Esto significa que existen $\vec{a}_m, \vec{a}_M \in A$ tales que

$$f(\vec{a}_m) \leq f(\vec{x}) \leq f(\vec{a}_M) \quad \text{para todo } \ \vec{x} \in A \tag{2.5.1}$$

Demostración: De acuerdo al teorema anterior, el conjunto $f(A)$ es compacto en $I\!R$ y, de acuerdo al teorema 1.6.2, $f(A)$ será cerrado y acotado. Por ser acotado podemos definir los reales $M := \sup\{f(A)\}$ y $m := \inf\{f(A)\}$ y, por ser cerrado $M, m \in f(A)$. Existirán entonces elementos $\vec{a}_M, \vec{a}_m \in A$ tales que $f(\vec{a}_M) = M$ y $f(\vec{a}_m) = m$. Es evidente entonces que $\vec{a}_m$ y $\vec{a}_M$ verifican 2.5.1.

Nota 2.5.1: El hecho que toda función continua alcance su máximo y su mínimo en un compacto, constituye una propiedad importante. Numerosos modelos matemáticos usados por las ciencias de la ingeniería y la física se plantean en términos de maximización o minimización de funciones. Estar entonces seguros de la existencia de soluciones para estos modelos, es crucial.

Teorema 2.5.3: Sea f una función continua definida en una parte compacta A de un e.v.n. $\vec{E}$ con valores en $I\!R^*_+$, (conjunto de los reales > 0). Entonces existe $\alpha > 0$ tal que $f(\vec{x}) \geq \alpha$ para todo $\vec{x} \in A$.

Demostración: De acuerdo al teorema anterior, existirá $\vec{a}_m \in A$ tal que $f(\vec{x}) \geq f(\vec{a}_m)$ para todo $\vec{x} \in A$. Como por hipótesis $f(\vec{a}_m) > 0$, si definimos $\alpha := f(\vec{a}_m)$ obtenemos que $f(\vec{x}) \geq \alpha$ para todo $\vec{x} \in A$.

Teorema 2.5.4: Sea A una parte compacta de un e.v.n. $\vec{E}$, y d_A la función distancia al conjunto A definida por 2.1.3. Para todo $\vec{a} \in \vec{E}$ existirá $\vec{p} \in A$ tal que

$$d_A(\vec{a}) = \|\vec{a} - \vec{p}\| \tag{2.5.2}$$

Este elemento $\vec{p} \in A$ se llama proyección de $\vec{a}$ sobre A.

Demostración: Como $\|\vec{a} - \cdot\| : \vec{E} \to I\!R$ es la composición de las funciones $\vec{x} \in \vec{E} \to \vec{a} - \vec{x} \in \vec{E}$ y $\|\cdot\| : \vec{E} \to I\!R$ y, como estas dos funciones son continuas, el teorema 2.1.2 nos dice que $\|\vec{a} - \cdot\|$ será también continua. Del teorema 2.5.2 concluimos entonces que esta función alcanza su mínimo sobre A en un punto $\vec{p} \in A$ y se tendrá por lo tanto $d_A(\vec{a}) = \|\vec{a} - \vec{p}\|$.

Nota 2.5.2: Es importante tener claro que la proyección depende de la norma. Así por ejemplo, en $\vec{E} = I\!R^2$, el conjunto de las proyecciones del origen sobre el triángulo de vértices (1,2)(1,-2) y (2,0) será:

i) usando la norma $\| \|_\infty$, igual al conjunto $\{(1,t) : t \in [-1,1]\}$.

ii) usando la norma $\| \|_2$, igual al conjunto $\{(1,0)\}$.

Nota 2.5.3: Si en el teorema anterior consideramos $\vec{E} = I\!R^n$, podemos hacer menos hipótesis sobre el conjunto A para asegurar la existencia de la proyección. Basta con suponer que A es cerrado (recordemos que de acuerdo al teorema 1.6.2 todo conjunto compacto es cerrado y acotado). En efecto, dado $r > d_A(\vec{a})$ es fácil ver que $d_A(\vec{a}) = d_{A\cap B(\vec{a},r)}(\vec{a})$. Como el conjunto $A \cap B(\vec{a}, r)$ es cerrado (ver ejemplo 1.2.2 y Teorema 1.2.2 ii)) y acotado, de acuerdo al teorema 1.6.3 será compacto. Aplicando el teorema anterior a la función $d_{A\cap B(\vec{a},r)}$, concluimos que existe $\vec{p} \in A$ tal que $d_A(\vec{a}) = \|\vec{a} - \vec{p}\|$.

Teorema 2.5.5: Sean A, B dos conjuntos cerrados disjuntos en un e.v.n. $\vec{E}$. Definamos la distancia entre A y B por

$$\delta(A, B) := \inf\{d_A(\vec{x}) : \vec{x} \in B\} \qquad 2.5.3$$

donde d_A es la función distancia al conjunto A definida por 2.1.3. Si B es compacto, entonces existirá $\vec{b} \in B$ tal que $\delta(A, B) = d_A(\vec{b}) > 0$. Si suponemos además que A es compacto, existirá también $\vec{a} \in A$ tal que

$$\delta(A, B) = \|\vec{b} - \vec{a}\| \qquad 2.5.4$$

Demostración: i) Del teorema 2.1.5 sabemos que d_A es una función continua y, como B es compacto, del teorema 2.5.2 concluimos que d_A alcanza su mínimo sobre B en un punto $\vec{b} \in B$. Se tiene así que $\delta(A, B) = d_A(\vec{b})$.

ii) La desigualdad $d_A(\vec{b}) > 0$ es consecuencia del hecho que $\vec{b} \notin \bar{A}$ (es fácil probar que todo conjunto A en un e.v.n. verifica la equivalencia $d_A(\vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} \in \bar{A}$).
iii) Supongamos ahora que A es compacto. De acuerdo al teorema anterior existe $\vec{a} \in A$ tal que $d_A(\vec{b}) = \|\vec{b} - \vec{a}\|$, que es lo que queríamos probar.

2.6 Continuidad uniforme y Lipschitzianidad

Definición 2.6.1: Una función f definida en una parte A de un e.v.n. $\vec{E}$ con valores en un e.v.n. $\vec{F}$ se dice uniformemente continua en A si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\vec{x}, \vec{y} \in A, \ \|\vec{x} - \vec{y}\| \leq \delta \Rightarrow \|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\| \leq \varepsilon \qquad 2.6.1$$

Nota 2.6.1: Es evidente que una función $f : A \to \vec{F}$ uniformemente continua en A, será continua en A. Por el contrario, si f es continua en A, no será necesariamente uniformemente continua en A. Un ejemplo simple que muestra este hecho es el de la función $f(x) = x^2$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, que siendo continua no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$. En efecto, para cualquier $\delta > 0$, basta con definir $x = \frac{1}{\delta} + \delta$, e $y = \frac{1}{\delta}$ y constatar que $|x - y| \leq \delta$ y que $|x^2 - y^2| = 2 + \delta^2 > 2$.

Teorema 2.6.1: Si f es una función continua definida en una parte compacta A de un e.v.n. $\vec{E}$ con valores en un e.v.n. $\vec{F}$, entonces ella es uniformemente continua.

Demostración: Razonemos por contradicción. Si f no es uniformemente continua en A, existirá $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existen $\vec{x}_\delta$, $\vec{y}_\delta \in A$ que verifican $\|\vec{x}_\delta - \vec{y}_\delta\| \leq \delta$ y $\|f(\vec{x}_\delta) - f(\vec{y}_\delta)\| > \varepsilon$. Aplicando éste hecho sucesivamente para $\delta = 1, 1/2, ...1/k, ...$ obtenemos en A un par de sucesiones $\{\vec{x}_k\}$ e $\{\vec{y}_k\}$ que verifican $\|\vec{x}_k - \vec{y}_k\| \leq 1/k$ y $\|f(\vec{x}_k) - f(\vec{y}_k)\| > \varepsilon$. Como A es compacto, existirá una subsucesión $\{x_{\alpha(k)}\}$ convergente a $\vec{a} \in A$. Por otra parte, como $\|\vec{y}_{\alpha(k)} - \vec{a}\| \leq \|\vec{y}_{\alpha(k)} - \vec{x}_{\alpha(k)}\| + \|\vec{x}_{\alpha(k)} - \vec{a}\| \leq 1/k + \|\vec{x}_{\alpha(k)} - \vec{a}\|$, vemos que $\|y_{\alpha(k)} - \vec{a}\| \underset{k}{\to} 0$ lo que implica, de acuerdo al lema 1.4.1, que la subsucesión $\{\vec{y}_{\alpha(k)}\}$ también converge a $\vec{a}$. Finalmente, la desigualdad $\varepsilon < \|f(\vec{x}_{\alpha(k)}) - f(\vec{y}_{\alpha(k)})\| \leq \|f(\vec{x}_{\alpha(k)}) - f(\vec{a})\| + \|f(\vec{a}) - f(\vec{y}_{\alpha(k)})\|$ contradice (de acuerdo al teorema 2.3.1) la continuidad de f en $\vec{a}$.

Definición 2.6.2: Una función f definida en una parte A de un e.v.n. $\vec{E}$ con valores en un e.v.n $\vec{F}$ se dirá Lipschitziana en A si existe una constante L, llamada constante de

Lipschitz, tal que

$$\|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\| \leq L\|\vec{x} - \vec{y}\| \quad \text{para todo } \vec{x}, \vec{y} \in A$$

Nota 2.6.2: Es evidente que si f es una función Lipschitziana en A, ella sigue siendo Lipschitziana si cambiamos la norma de $\vec{E}$ y la de $\vec{F}$ por otras equivalentes. También es evidente que una función Lipschitziana es uniformemente continua.

2.7 El e.v.n. de las funciones lineales continuas

Teorema 2.7.1: Una función lineal ℓ de un e.v.n. $\vec{E}$ en un e.v.n. $\vec{F}$ es continua si y solo si ella es continua en $\vec{0} \in \vec{E}$ y esto se tiene, si y solo si existe una constante L tal que

$$\|\ell(\vec{x})\| \leq L\|\vec{x}\| \quad \text{para todo } \vec{x} \in \vec{E} \tag{2.7.1}$$

Demostración: i) Si ℓ es continua, ella es en particular continua en $\vec{0}$.
ii) Demostremos ahora que si ℓ es continua en $\vec{0}$, entonces se tiene la desigualdad 2.7.1. Dado $\varepsilon = 1$ debe existir $\delta > 0$ tal que

$$\|\vec{z}\| \leq \delta \Rightarrow \|\ell(\vec{z})\| \leq 1$$

y como $\vec{z} := \frac{\delta}{\|\vec{x}\|}\vec{x}$ verifica $\|\vec{z}\| \leq \delta$ para todo $\vec{x} \neq \vec{0}$, se tendrá que $\|\ell(\vec{x})\| \leq \frac{1}{\delta}\|\vec{x}\|$ para todo $\vec{x} \in \vec{E}$, que equivale a 2.7.1 con $L := \frac{1}{\delta}$.
iii) Para terminar demostremos que 2.7.1 implica que ℓ es continua, como

$$\|\ell(\vec{x}) - \ell(\vec{x}')\| = \|\ell(\vec{x} - \vec{x}')\| \leq L\|\vec{x} - \vec{x}'\| \quad \text{para todo } \vec{x}, \vec{x}' \in \vec{E}$$

concluimos que ℓ es lipschitziana en $\vec{E}$ y a fortiori continua.

Nota 2.7.1: La propiedad 2.7.1 constituye una caracterización fundamental de la continuidad de las funciones lineales que nos permitirá, entre otras cosas, definir una norma en el e.v. de las funciones lineales continuas. Ella nos muestra también que toda función lineal continua es Lipschitziana.

Teorema 2.7.2: En el e.v. $\mathcal{L}(\vec{E}, \vec{F})$ de las funciones lineales continuas del e.v.n. $\vec{E}$ en el e.v.n. $\vec{F}$, la aplicación que a $\ell \in \mathcal{L}(\vec{E}, \vec{F})$ le hace corresponder

$$\|\ell\| := \sup_{\vec{x} \neq \vec{0}} \frac{\|\ell(\vec{x})\|}{\|\vec{x}\|} \tag{2.7.2}$$

verifica las propiedades de la definición 1.1.1 y constituye así una norma en $\mathcal{L}(\vec{E},\vec{F})$.

Demostración: De acuerdo al teorema anterior, la continuidad de ℓ implica la existencia de una constante L que verifica 2.7.1, lo que muestra que el supremo en 2.7.2 es finito (el cuociente está acotado superiormente por L). Demostremos ahora cada una de las tres propiedades de la definición 1.1.1. i) Es evidente. ii) Dado $\lambda \in I\!R$ y $\ell \in \mathcal{L}(\vec{E},\vec{F})$ se tiene

$$||\lambda\ell|| = \sup \frac{||\lambda\ell(\vec{x})||}{||\vec{x}||} = \sup |\lambda| \frac{||\ell(\vec{x})||}{||\vec{x}||} = |\lambda| \sup \frac{||\ell(\vec{x})||}{||\vec{x}||} = |\lambda|||\ell||$$

iii) Dados $\ell, m \in \mathcal{L}(\vec{E},\vec{F})$ se tiene

$$||\ell + m|| = \sup \frac{||(\ell+m)(\vec{x})||}{||\vec{x}||} \leq \sup \frac{||\ell(\vec{x})|| + ||m(\vec{x})||}{||\vec{x}||}$$

$$\leq \sup \frac{||\ell(\vec{x})||}{||\vec{x}||} + \sup \frac{||m(\vec{x})||}{||\vec{x}||} = ||\ell|| + ||m||$$

Nota 2.7.2: Es fácil ver que para $\ell \in \mathcal{L}(\vec{E},\vec{F})$ la cantidad $||\ell||$ es la menor constante que verifica la desigualdad 2.7.1. Se tendrá entonces que

$$||\ell(\vec{x})|| \leq ||\ell||||\vec{x}|| \quad \text{para todo } \vec{x} \in \vec{E} \qquad 2.7.3$$

Nota 2.7.3: $\mathcal{L}(\vec{E},\vec{F})$ dotado de la norma 2.7.2 representa el primer e.v.n. de dimensión infinita (cuando $\vec{E}$ o $\vec{F}$ es de dimensión infinita) que estudiaremos en este curso. Más adelante estudiaremos otros.

Dada la importancia que tienen en un e.v.n. las sucesiones de Cauchy, una de las primeras preguntas que debemos hacernos frente a un e.v.n. de dimensión infinita, es si será o no un espacio de Banach (ver definición 1.5.2). El teorema que sigue da una respuesta satisfactoria a esta pregunta.

Teorema 2.7.3: Si $\vec{E}$ es un e.v.n. y $\vec{F}$ un espacio de Banach entonces $\mathcal{L}(\vec{E},\vec{F})$ dotado de la norma 2.7.2 también es un espacio de Banach.

Demostración: Sea $\{\ell_k\}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}(\vec{E},\vec{F})$. Para cada $\vec{x} \in \vec{E}$, de la desigualdad 2.7.3, aplicada a las funciones lineales $(\ell_k - \ell_j)$, se tendrá

$$||\ell_k(\vec{x}) - \ell_j(\vec{x})|| = ||(\ell_k - \ell_j)(\vec{x})|| \leq ||\ell_k - \ell_j||||\vec{x}|| \text{ para todo } k, j \in I\!N$$

lo que nos permite deducir que $\{\ell_k(\vec{x})\}$ es una sucesión de Cauchy en $\vec{F}$ y, como $\vec{F}$ es un espacio de Banach, concluimos que $\{\ell_k(\vec{x})\}$ es una sucesión convergente. Definamos entonces la aplicación $\ell : \vec{E} \to \vec{F}$ por la relación $\ell(x) := \lim \ell_k(\vec{x})$ e intentemos demostrar que $\{\ell_k\}$ converge a ℓ en el e.v.n. $\mathcal{L}(\vec{E}, \vec{F})$.
Para empezar debemos probar que $\ell \in \mathcal{L}(\vec{E}, \vec{F})$, es decir, que ℓ es lineal y continua. Dados $\vec{x}, \vec{y} \in \vec{E}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, del teorema 1.4.4 deducimos que

$$\begin{aligned}\ell(\vec{x}+\vec{y}) &= \lim \ell_k(\vec{x}+\vec{y}) = \lim[\ell_k(\vec{x}) + \ell_k(\vec{y})] \\ &= \lim \ell_k(\vec{x}) + \lim \ell_k(\vec{y}) = \ell(\vec{x}) + \ell(\vec{y}) \\ \ell(\lambda\vec{x}) &= \lim \ell_k(\lambda\vec{x}) = \lim \lambda\ell_k(\vec{x}) = \lambda \lim \ell_k(\vec{x}) = \lambda\ell(\vec{x})\end{aligned}$$

lo que muestra que ℓ es lineal.
Dado $\varepsilon > 0$, por ser $\{\ell_k\}$ de Cauchy, debe existir $K \in \mathbb{N}$ tal que $\|\ell_k - \ell_j\| \leq \varepsilon$ para todo $k, j \geq K$, lo que implica que $\|\ell_k\| = \|\ell_k - \ell_j + \ell_j\| \leq \varepsilon + \|\ell_j\|$ para todo $k, j \geq K$. Usando entonces 2.7.3, de las dos desigualdades anteriores deducimos que

$$\begin{aligned}&\|\ell_k(\vec{x}) - \ell_j(\vec{x})\| \leq \varepsilon\|\vec{x}\| \quad \text{para todo} \quad k, j \geq K \\ &\|\ell_k(\vec{x})\| \leq (\varepsilon + \|\ell_j\|)\|\vec{x}\| \quad \text{para todo} \quad k, j \geq K\end{aligned}$$

Fijando $j \geq K$ y $\vec{x} \in \vec{E}$ en estas dos desigualdades, teniendo en cuenta la continuidad de la norma (teorema 2.1.4) y el teorema 2.2.1 y, tomando límite sobre k obtenemos

$$\begin{aligned}&\|\ell(\vec{x}) - \ell_j(\vec{x})\| \leq \varepsilon\|\vec{x}\| \\ &\|\ell(\vec{x})\| \leq (\varepsilon + \|\ell_j\|)\|\vec{x}\|\end{aligned}$$

que serán válidas para todo $\vec{x} \in \vec{E}$ y todo $j \geq K$.
Usando el teorema 2.7.1, la segunda de estas desigualdades nos muestra que la función lineal ℓ es continua.
Finalmente, de la definición de la norma en $\mathcal{L}(\vec{E}, \vec{F})$, la primera de las dos desigualdades anteriores nos muestra que

$$\|\ell - \ell_j\| \leq \varepsilon \quad \text{para todo} \quad j \geq K$$

lo que significa que $\{\ell_k\}$ converge a ℓ en $\mathcal{L}(\vec{E}, \vec{F})$.

Teorema 2.7.4: Toda función lineal ℓ de $\mathbb{R}^n$ en un e.v.n. $\vec{F}$ es continua.

Demostración: Como todas las normas en $I\!R^n$ son equivalentes, de acuerdo a la nota 2.1.1 podemos usar cualquiera, en particular, la norma $\| \ \|_\infty$. Sea $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n$ la base canónica de $I\!R^n$. Para todo $\vec{x} \in I\!R^n$ se tendrá

$$\|\ell(\vec{x})\| = \|\ell(\sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i)\| = \|\sum_{i=1}^{n} x_i\ell(\vec{e}_i)\| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|\|\ell(\vec{e}_i)\| \leq [\sum_{i=1}^{n} \|\ell(\vec{e}_i)\|]\|\vec{x}\|_\infty$$

Esto muestra que ℓ verifica la desigualdad 2.7.1 con $L = \sum_{i=1}^{n} \|\ell(\vec{e}_i)\|$ y, de acuerdo al teorema 2.7.1, será continua.

Nota 2.7.4: Más adelante veremos que existen aplicaciones lineales que no son continuas. Naturalmente, esto se tendrá cuando el dominio es un e.v.n. de dimensión infinita.

2.8 Teorema del punto fijo

Definición 2.8.1: Una aplicación f de un e.v.n. $\vec{E}$ en un e.v.n. $\vec{F}$ se dirá contractante en una parte A de $\vec{E}$, si es Lipschitziana en A con constante de Lipchitz $L < 1$.

Teorema 2.8.1: Si $f : A \to A$ es contractante en una parte cerrada A de un espacio de Banach $\vec{E}$ (ver definición 1.5.2), entonces existe un único $\vec{a} \in A$ tal que $f(\vec{a}) = \vec{a}$. El elemento $\vec{a}$ se llama punto fijo de f en A.

Demostración: Demostremos primero la unicidad. Si $f(\vec{a}) = \vec{a}$ y $f(\vec{b}) = \vec{b}$ entonces

$$\|\vec{a} - \vec{b}\| = \|f(\vec{a}) - f(\vec{b})\| \leq L\|\vec{a} - \vec{b}\|$$

Como $L < 1$, vemos que esta desigualdad implica que $\vec{a} = \vec{b}$.
Para demostrar la existencia vamos a construir una sucesión $\vec{x}_k$ convergente a un punto fijo de f. A partir de $\vec{x}_1 \in A$, construímos $\{\vec{x}_k\}$ en A mediante la fórmula de recurrencia $\vec{x}_k = f(\vec{x}_{k-1})$. Esta sucesión verifica

$$\begin{aligned}
\|\vec{x}_3 - \vec{x}_2\| &= \|f(\vec{x}_2) - f(\vec{x}_1)\| \leq L\|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\| \\
\|\vec{x}_4 - \vec{x}_3\| &= \|f(\vec{x}_3) - f(\vec{x}_2)\| \leq L\|\vec{x}_3 - \vec{x}_2\| \leq L^2\|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\| \\
&\vdots \\
\|\vec{x}_{k+1} - \vec{x}_k\| &= \|f(\vec{x}_k) - f(\vec{x}_{k-1})\| \leq L\|\vec{x}_k - \vec{x}_{k-1}\| \leq ... \leq L^{k-1}\|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\|
\end{aligned}$$

por lo tanto para todo $k, p \in I\!N$ se tiene

$$\begin{aligned}\|\vec{x}_{k+p} - \vec{x}_k\| &\leq \|\vec{x}_{k+p} - \vec{x}_{k+p-1}\| + \|\vec{x}_{k+p-1} - \vec{x}_{k+p-2}\| + ... + \|\vec{x}_{k+1} - \vec{x}_k\| \\ &\leq [L^{k+p-2} + L^{k+p-3} + ... + L^{k-1}] \ \ \|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\| \\ &\leq \frac{L^{k-1}}{1-L}\|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\|\end{aligned}$$

Como $L^{k-1} \underset{k}{\rightarrow} 0$ es, fácil verificar que $\{\vec{x}_k\}$ es una sucesión de Cauchy. En efecto, dado $\varepsilon > 0$ existe $K \in I\!N$ tal que $\frac{L^{k-1}\|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\|}{1-L} \leq \varepsilon$ para todo $k \geq K$, por lo tanto $\|\vec{x}_{k+p} - \vec{x}_k\| \leq \varepsilon$ para todo $p \geq 0$ y todo $k \geq K$ y definiendo $j = k + p$ obtenemos $\|\vec{x}_j - \vec{x}_k\| \leq \varepsilon$ para todo $j, k \geq K$, que corresponde exactamente a la definición de sucesión de Cauchy. Como $\vec{E}$ es un espacio de Banach concluimos que $\{\vec{x}_k\}$ es convergente y, por ser A cerrado el límite $\vec{a}$ de esta sucesión esta en A y verifica

$$\vec{a} = \lim \vec{x}_{k+1} = \lim f(\vec{x}_k) = f(\vec{a})$$

donde la última igualdad se desprende de 2.3.1 por ser f continua en $\vec{a}$. Esto muestra que $\vec{a}$ es punto fijo de la función f.

2.8 Ejercicios

1. Sea f una función continua definida en un e.v.n. $\vec{E}$ con valores en un e.v.n $\vec{F}$. Demuestre que
   i) Si $B \subset \vec{F}$ es cerrado, entonces $f^{-1}[B] \subset \vec{E}$ también es cerrado.
   ii) Si $B \subset \vec{F}$ es abierto, entonces $f^{-1}[B] \subset \vec{E}$ también es abierto.
   iii) $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ para todo $A \subset \vec{E}$.
   iv) $f^{-1}[\overset{\circ}{B}] \subset (f^{-1}[B])^{\circ}$ para todo $B \subset \vec{F}$.
   v) $\overline{f^{-1}[B]} \subset f^{-1}[\bar{B}]$ para todo $B \subset \vec{F}$.

2. Demuestre que la función $f : I\!R^2 \rightarrow I\!R$ definida por $f(\vec{x}) = \frac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^4}$ si $\vec{x} \neq \vec{0}$ y $f(\vec{0}) = 0$ es continua en todo punto de $I\!R^2$ salvo en $\vec{0}$.

3. Demuestre que la función $f : I\!R^2 \rightarrow I\!R$ definida por $f(\vec{x}) = \frac{x_1 x_2}{\|\vec{x}\|_2}$ si $\vec{x} \neq \vec{0}$ y $f(\vec{0}) = 0$, es continua.

4. Demuestre que la función $f : I\!R^2 \rightarrow I\!R^2$ definida por $f(\vec{x}) = \frac{1}{\|\vec{x}\|_2}(x_1^2, x_2^2)$ si $\vec{x} \neq \vec{0}$ y $f(\vec{0}) = \vec{0}$, es continua.

5. Considere la función $f: I\!R^2 \setminus \{\vec{0}\} \to I\!R$ definida por $f(\vec{x}) = \frac{x_1 x_2}{\|\vec{x}\|_2^2}$. Demuestre que $\lim_{x_1 \to 0}(\lim_{x_2 \to 0} f(\vec{x})) = \lim_{x_2 \to 0}(\lim_{x_1 \to 0} f(\vec{x})) = 0$ y que $\lim_{\vec{x} \to \vec{0}} f(\vec{x})$ no existe.

6. Considere la función $f: I\!R^2 \setminus \{\vec{0}\} \to I\!R$ definida por $f(\vec{x}) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{\|\vec{x}\|_2^2}$. Demuestre que $\lim_{x_2 \to 0}(\lim_{x_1 \to 0} f(\vec{x})) = -1$, $\lim_{x_1 \to 0}(\lim_{x_2 \to 0} f(\vec{x})) = 1$ y, que $\lim_{\vec{x} \to \vec{0}} f(\vec{x})$ no existe.

7. Sea f una función continua definida en un e.v.n. $\vec{E}$ con valores en un e.v.n. $\vec{F}$. Demuestre que el conjunto $G(f) = \{(\vec{x}, \vec{y}) \in \vec{E} \times \vec{F} : \vec{y} = f(\vec{x})\}$ es cerrado en el e.v.n. $\vec{E} \times \vec{F}$.

8. Sean f, g dos funciones continuas definidas en un e.v.n. $\vec{E}$ con valores en un e.v.n. $\vec{F}$ y, sea $A \subset \vec{E}$ tal que $f(\vec{x}) = g(\vec{x})$ para todo $\vec{x} \in A$. Demuestre que $f(\vec{x}) = g(\vec{x})$ para todo $\vec{x} \in \bar{A}$.

9. Sean $\vec{E}_1, ..., \vec{E}_n$ espacios vectoriales normados y sea p_i la función del e.v.n. $\vec{E} = \vec{E}_1 \times ... \times \vec{E}_n$ en $\vec{E}_i$, que a cada $\vec{x} \in \vec{E}$ le asocia su componente $\vec{x}_i \in \vec{E}_i$. Demuestre que esta función es continua.

10. Sea f una función continua definida en un e.v.n. $\vec{E}$ con valores en $I\!R$. Demuestre que
    i) $S_\lambda = \{\vec{x} \in \vec{E} : f(\vec{x}) \leq \lambda\}$ es un conjunto cerrado para todo $\lambda \in I\!R$.
    ii) $I_\lambda = \{\vec{x} \in \vec{E} : f(\vec{x}) = \lambda\}$ es un conjunto cerrado para todo $\lambda \in I\!R$.
    iii) $A_\lambda = \{\vec{x} \in \vec{E} : f(\vec{x}) < \lambda\}$ es un conjunto abierto para todo $\lambda \in I\!R$.

11. Sea f una función continua y biyectiva, de un compacto A de un e.v.n. $\vec{E}$ en un conjunto B de un e.v.n. $\vec{F}$. Demuestre que la función $f^{-1}: B \to A$ es continua.

12. Sea f una función continua definida en $I\!R^n$ con valores en $I\!R$. Si f verifica la propiedad: para todo $L \in I\!R_+$ existe $K \in I\!N$ tal que $\|\vec{x}\| \geq K \Rightarrow f(\vec{x}) \geq L$, demuestre que el conjunto S_λ definido en el ejercicio 10 es un compacto y que la función f alcanza su mínimo en $I\!R^n$.

13. Dado un e.v.n. $\vec{E}$ y dos puntos $\vec{a}, \vec{b} \in \vec{E}$ demuestre que la función $\lambda \in I\!R \mapsto \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a}) \in \vec{E}$ es continua. Con esto, demuestre que el intervalo $[\vec{a}, \vec{b}] = \{\vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a}) \in \vec{E} : \lambda \in [0, 1]\}$ es compacto.

14. Demuestre que la función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$ es uniformemente continua pero no es Lipschitziana.

15. Demuestre que toda función Lipschitziana es uniformemente continua.

16. Sea f una función uniformemente continua en una parte A de un e.v.n. $\vec{E}$ con valores en un e.v.n. $\vec{F}$. Demuestre que si $\{\vec{x}_k\}$ es una sucesión de Cauchy en A, entonces $\{f(\vec{x}_k)\}$ es una sucesión de Cauchy en $\vec{F}$. Demuestre que esta propiedad no se tiene necesariamente si f no es uniformemente continua en A.

17. Sea ℓ una función lineal definida en un e.v.n. $\vec{E}$ con valores en $\mathbb{R}$. Demostrar que ℓ es continua si y solo si el conjunto $N(\ell) := \{\vec{x} \in \vec{E} : \ell(\vec{x}) = 0\}$ es cerrado en $\vec{E}$.

18. Sea ℓ una función lineal definida en el e.v.n. $(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}), \|\ \|_1)$ con valores en $\mathbb{R}$, por $\ell(f) = \int\limits_a^b f(x)dx$. Demuestre que ℓ es continua.

19. Sea ℓ una función lineal definida en el e.v.n. $(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}), \|\ \|_\infty)$ con valores en $\mathbb{R}$, por $\ell(f) = \int\limits_a^b g(x)f(x)dx$, donde g es una función fija en $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. Demuestre que ℓ es continua.

20. Sea ℓ una función lineal definida en el e.v.n. $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|\ \|_1)$ con valores en $\mathbb{R}$, por $\ell(f) = f(0)$. Considere en $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ la sucesión $\{f_n\}$ definida por $f_n(x) = 1 - nx$ si $x \in [0, 1/n]$, $f(x) = 0$ si $x \in [1/n, 1]$. Usando esta sucesión demuestre que ℓ no es continua.

21. Usando el teorema del punto fijo de Banach demuestre que dado $\alpha > 0$, la sucesión $\{x_k\}$ construída por la fórmula recurrente $x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{\alpha}{x_k}\right)$, a partir de un valor $x_1 \geq \sqrt{\alpha}$, converge a $\sqrt{\alpha}$.