I. ESPACIOS VECTORIALES NORMADOS

1.0 Introducción.

La estructura de espacio vectorial es la estructura algebraica de mayor importancia del análisis matemático. Al definir en un espacio vectorial la noción de norma, estamos introduciendo una noción fundamental, que es la de vecindad de un punto del espacio, o más intuitivamente la de cercania entre dos puntos.
Dada una norma en un espacio vectorial, definiremos en este capítulo las herramientas y propiedades básicas que nos permitirán más adelante ir construyendo las herramientas y propiedades más complejas que intervienen en los modelos matemáticos de la ingeniería de la física y de otras ciencias.

1.1 Espacios vectoriales normados. Bolas abiertas y cerradas. Conjuntos acotados. Normas equivalentes

Definición 1.1.1: Un espacio vectorial normado (e.v.n.) es un e.v. $\vec{E}$ sobre el cuerpo $I\!R$ (de los reales) o C (de los complejos), dotado de una aplicación de $\vec{E}$ en $I\!R_+$ (conjunto de los reales ≥ 0), llamada norma y que denotamos $\|\cdot\|$, con las siguientes tres propiedades: para todo $\vec{a}, \vec{b} \in \vec{E}$ y para todo λ en el cuerpo, se tiene

i) $\|\vec{a}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$ 1.1.1

ii) $\|\lambda\vec{a}\| = |\lambda|\, \|\vec{a}\|$ 1.1.2

iii) $\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$ 1.1.3

Hablaremos entonces del e.v.n. $(\vec{E}, \|\;\|)$ o simplemente (si no hay confusión posible) del e.v.n. $\vec{E}$.

Nota 1.1.1: En adelante, cada vez que nos demos un e.v., supondremos que está constituído por más de un elemento, es decir, que es diferente de $\{\vec{0}\}$. Si no decimos lo contrario, supondremos también que el cuerpo es $I\!R$.

Ejemplo 1.1.1: El e.v. $I\!R^n$ dotado de alguna de las normas:

$$\|\vec{a}\|_2 := [\sum_{i=1}^{n} a_i^2]^{\frac{1}{2}} \qquad 1.1.4$$

$$\|\vec{a}\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |a_i| \qquad 1.1.5$$

$$\|\vec{a}\|_\infty := \max\{|a_i|,\ i : 1, ..., n\} \qquad 1.1.6$$

donde las cantidades $a_i \in I\!R$ son las componentes de $\vec{a} \in I\!R^n$, es un e.v.n.

Ejemplo 1.1.2: El e.v. $\mathcal{L}(\vec{E}, \vec{F})$ de las aplicaciones lineales de un e.v.n. $(\vec{E}, \|\ \|_{\vec{E}})$ en un e.v.n. $(\vec{F}, \|\ \|_{\vec{F}})$, que cumplen la propiedad

$$\ell \in \mathcal{L}(\vec{E}, \vec{F}) \Leftrightarrow \exists L \in I\!R \text{ tal que } \|\ell(\vec{x})\|_{\vec{F}} \leq L\|\vec{x}\|_{\vec{E}}\ \forall \vec{x} \in \vec{E}$$

dotado de la norma

$$\|\ell\| := \sup_{\substack{\vec{x}\in\vec{E} \\ \vec{x}\neq\vec{0}}} \frac{\|\ell(\vec{x})\|_{\vec{F}}}{\|\vec{x}\|_{\vec{E}}} \qquad 1.1.7$$

es un e.v.n. Más adelante veremos que $\mathcal{L}(\vec{E}, \vec{F})$ es el e.v. de las funciones lineales continuas de $\vec{E}$ en $\vec{F}$ (ver teorema 2.7.1).

Ejemplo 1.1.3: El e.v. $\mathcal{L}(I\!R^n, I\!R^m)$ dotado de alguna de las normas:

$$\|\ell\|_F := \left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right]^{1/2} \qquad 1.1.8$$

$$\|\ell\|_1 := \max_j \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \qquad 1.1.9$$

$$\|\ell\|_\infty := \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \qquad 1.1.10$$

donde las cantidades a_{ij} $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ son los elementos de la matriz que representa a la aplicación lineal $\ell \in \mathcal{L}(I\!R^n, I\!R^m)$, es un e.v.n. . La norma en 1.1.8 se llama norma de Frobenius.

Ejemplo 1.1.4: El e.v. $\mathcal{A}(A, \vec{F})$ de todas las funciones acotadas definidas en un conjunto A con valores en un e.v.n. $(\vec{F}, \|\ \|_{\vec{F}})$ ($f : A \to \vec{F}$ se dice acotada si existe $r \in I\!R_+$ tal que $\|f(x)\|_{\vec{F}} \leq r$ para todo $x \in A$), dotado de la norma:

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in A} \|f(x)\|_{\vec{F}} \qquad 1.1.11$$

es un e.v.n.

Ejemplo 1.1.5: Sean $(\vec{E}_1, \|\ \|_{\vec{E}_1}), ..., (\vec{E}_n, \|\ \|_{\vec{E}_n})$, n e.v.n. El e.v. $\vec{E}_1 \times ... \times \vec{E}_n$ dotado de alguna de las normas

$$\|\vec{a}\|_2 := \left[\sum_{i=1}^{n} \|\vec{a}_i\|^2_{\vec{E}_i}\right]^{1/2}$$
$$\|\vec{a}\|_1 := \sum_{i=1}^{n} \|\vec{a}_i\|_{\vec{E}_i}$$
$$\|\vec{a}\|_\infty := \max\{\|\vec{a}_i\|_{\vec{E}_i}, i : 1, ..., n\}$$

donde los elementos $\vec{a}_i \in \vec{E}_i$ son las componentes de $\vec{a} \in \vec{E}_1 \times ... \times \vec{E}_n$, es un e.v.n.

Definición 1.1.2: Dados dos elementos $\vec{a}, \vec{b}$ en un e.v.n. $\vec{E}$, se llama distancia de $\vec{a}$ a $\vec{b}$ a la cantidad $\|\vec{a} - \vec{b}\|$. De este modo, la cantidad $\|\vec{a}\|$ corresponde a la distancia de $\vec{a}$ al origen $\vec{0}$.

Definición 1.1.3: Dado un elemento $\vec{c}$ en un e.v.n. $\vec{E}$ y un real $r > 0$, se llama bola cerrada (respectivamente abierta) de centro $\vec{c}$ y radio r al conjunto

$$B(\vec{c}, r) := \{\vec{x} \in \vec{E} \ : \ \|\vec{c} - \vec{x}\| \leq r\} \qquad 1.1.12$$
$$(\text{ resp. } B'(\vec{c}, r) := \{\vec{x} \in \vec{E} \ : \ \|\vec{c} - \vec{x}\| < r\}) \qquad 1.1.13$$

Definición 1.1.4: Una parte A de un e.v.n. $\vec{E}$ se dirá acotada si existe $r > 0$ tal que $A \subset B(\vec{0}, r)$, es decir, tal que $\|\vec{x}\| \leq r$ para todo $\vec{x} \in A$.

Definición 1.1.5: Dos normas $\|\ \|_1$ y $\|\ \|_2$, definidas en un e.v. $\vec{E}$, se dirán equivalentes si existen dos constantes L_1 y L_2 tales que

$$\|\ \|_2 \leq L_1 \|\ \|_1 \ \text{ y } \ \|\ \|_1 \leq L_2 \|\ \|_2 \qquad 1.1.14$$

Nota 1.1.2: Se demuestra que la primera de las desigualdades en 1.1.14 es equivalente a la propiedad

$$\text{"}\ \textit{para toda bola } B_2(\vec{0},\varepsilon) \textit{ existe una bola } B_1(\vec{0},\delta) \subset B_2(\vec{0},\varepsilon)\text{"} \qquad 1.1.15$$

y la segunda es equivalente a la propiedad

$$\text{"}\ \textit{para toda bola } B_1(\vec{0},\varepsilon) \textit{ existe una bola } B_2(\vec{0},\delta) \subset B_1(\vec{0},\varepsilon)\text{"} \qquad 1.1.16$$

donde los subíndices indican la norma que interviene en la definición de la respectiva bola. Es fácil verificar que las propiedades 1.1.15 y 1.1.16 son las mismas si se cambia $\vec{0}$ por cualquier otro elemento $\vec{a} \in \vec{E}$.

Nota 1.1.3: Se demuestra que todas las normas que se pueden definir en un e.v. de dimensión finita son equivalentes. En particular, se demuestra fácilmente que, las normas definidas en los ejemplos 1.1.1 y 1.1.3 verifican, para todo $\vec{a} \in I\!R^n$:

$$||\vec{a}||_\infty \leq ||\vec{a}||_1 \leq n||\vec{a}||_\infty$$
$$||\vec{a}||_\infty \leq ||\vec{a}||_2 \leq \sqrt{n}||\vec{a}||_\infty$$
$$||\vec{a}||_2 \leq ||\vec{a}||_1 \leq \sqrt{n}||\vec{a}||_2$$

y, para todo $\ell \in \mathcal{L}(I\!R^n, I\!R^m)$:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}||\ell||_\infty \leq ||\ell||_F \leq \sqrt{nm}||\ell||_\infty$$
$$\frac{1}{\sqrt{m}}||\ell||_1 \leq ||\ell||_F \leq n||\ell||_1$$
$$\frac{1}{n}||\ell||_\infty \leq ||\ell||_1 \leq m||\ell||_\infty$$

En lo que sigue cuando hablemos del e.v.n. $I\!R^n$, sin especificar la norma, entenderemos que se trata de cualquiera de las tres normas del ejemplo 1.1.1. Más adelante veremos que en un e.v. (de dimensión infinita) se pueden definir normas que no son equivalentes.

Nota 1.1.4: Se demuestra fácilmente que las tres normas definidas en el ejemplo 1.1.5 son equivalentes (sin importar la dimensión de los $\vec{E}_i$). En lo que sigue, cuando hablemos de un e.v.n. producto sin especificar la norma, entenderemos que se trata de alguna de estas tres.

1.2 Conjuntos abiertos y cerrados

Definición 1.2.1: Una parte A de un e.v.n $\vec{E}$ se dirá abierta si para todo $\vec{a} \in A$ existe una bola $B(\vec{a}, \delta) \subset A$. Una parte A de un e.v.n $\vec{E}$ se dirá cerrada si su complemento A^c es abierto.

Nota 1.2.1: Dadas dos normas $\| \|_1$ y $\| \|_2$ en un e.v. $\vec{E}$, los conjuntos abiertos en $\vec{E}$ no serán necesariamente los mismos si dotamos a $\vec{E}$ de la primera o de la segunda de estas normas, dicho de otro modo, los conjuntos abiertos del e.v.n. $(\vec{E}, \| \|_1)$ no serán necesariamente los mismos que los del e.v.n. $(\vec{E}, \| \|_2)$. Pero, si se tiene la propiedad 1.1.15 (equivalente a $\| \|_2 \leq L_1 \| \|_1$) vemos que todo conjunto abierto en $\vec{E}$ con la norma $\| \|_2$, seguirá siendo abierto en $\vec{E}$ con la norma $\| \|_1$. Análogamente, si se tiene la propiedad 1.1.16 (equivalente a $\| \|_1 \leq L_2 \| \|_2$) vemos que todo conjunto abierto en $\vec{E}$ con la norma $\| \|_1$ será también abierto en $\vec{E}$ con la norma $\| \|_2$. En consecuencia, si $\| \|_1$ y $\| \|_2$ son equivalentes, entonces los conjuntos abiertos son los mismos si dotamos a $\vec{E}$ de la primera o de la segunda de estas normas.
Lo mismo que hemos dicho para los conjuntos abiertos, vale para los conjuntos cerrados. De lo anterior y de lo que decíamos en la nota 1.1.3, podemos concluir que en un e.v. de dimensión finita, cualquiera que sea la norma que definamos, los conjuntos abiertos y los conjuntos cerrados serán los mismos.

Ejemplo 1.2.1: Demostremos que en un e.v.n. $\vec{E}$ toda bola abierta $B'(\vec{c}, r)$ es un conjunto abierto. Dado $\vec{a} \in B'(\vec{c}, r)$ se tiene que $\|\vec{c} - \vec{a}\| < r$. Escojamos entonces un real $\delta > 0$ tal que $\delta < r - \|\vec{c} - \vec{a}\|$ y demostremos $B(\vec{a}, \delta) \subset B'(\vec{c}, r)$:

$$\begin{aligned}
\vec{x} \in B(\vec{a}, \delta) &\Rightarrow \|\vec{a} - \vec{x}\| \leq \delta \\
&\Rightarrow \|\vec{a} - \vec{x}\| < r - \|\vec{c} - \vec{a}\| \\
&\Rightarrow \|\vec{a} - \vec{x}\| + \|\vec{c} - \vec{a}\| < r \\
&\Rightarrow \|\vec{c} - \vec{x}\| < r \\
&\Rightarrow \vec{x} \in B'(\vec{c}, r)
\end{aligned}$$

con lo que queda demostrado que $B'(\vec{c}, r)$ es un conjunto abierto.

Ejemplo 1.2.2: Demostremos que en un e.v.n. $\vec{E}$ toda bola cerrada $B(\vec{c}, r)$ es un conjunto cerrado. Para esto hay que demostrar que el conjunto $B(\vec{c}, r)^c = \{\vec{x} \in \vec{E} :$

$\|\vec{c}-\vec{x}\| > r\}$ es abierto. Dado $\vec{a} \in B(\vec{c}, r)^c$ se tiene que $\|\vec{a}-\vec{c}\|-r > 0$. Escojamos entonces un real $\delta > 0$ tal que $\delta < \|\vec{c} - \vec{a}\| - r$. Se demuestra fácilmente que $B(\vec{a}, \delta) \subset B(\vec{c}, r)^c$, con lo que queda demostrado que $B(\vec{c}, r)^c$ es un conjunto abierto.

Teorema 1.2.1: Si denotamos por $\mathcal{O}$ la familia de todos los subconjuntos abiertos de un e.v.n. $\vec{E}$, se tendrán las tres propiedades fundamentales siguientes:

i) Si $\{A_i\}_{i=1}^n$ es una familia finita de elementos de $\mathcal{O}$, entonces

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{O}$$

ii) Si $\{A_t\}_{t\in T}$ es una familia cualquiera de elementos de $\mathcal{O}$, entonces

$$\bigcup_{t\in T} A_t \in \mathcal{O}$$

iii) $\vec{E} \in \mathcal{O}$ y $\phi \in \mathcal{O}$.

Demostración:

i) Debemos demostrar que el conjunto $A := \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ es abierto. Si $A = \phi$ remitimos la demostración a la parte iii). Si $A \neq \phi$, dado $\vec{a} \in A$, se tendrá que $\vec{a} \in A_i$ para todo $i : 1...n$ y, como los A_i son abiertos, existirán $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0, ..., \delta_n > 0$ tales que $B(\vec{a}, \delta_i) \subset A_i$ para todo $i : 1...n$. Definamos ahora $\delta := \min\{\delta_i, i : 1...n\} > 0$. Se tiene entonces que $B(\vec{a}, \delta) \subset B(a, \delta_i) \subset A_i$ para todo $i : 1...n$, lo cual implica que $B(\vec{a}, \delta) \subset A$. Con esto hemos demostrado que A es abierto.

ii) Debemos demostrar que el conjunto $A := \bigcup_{t\in T} A_t$ es abierto. Sea $\vec{a} \in A$, entonces $\vec{a} \in A_{\bar{t}}$ para algún $\bar{t} \in T$ y, como $A_{\bar{t}}$ es abierto, existirá $\delta > 0$ tal que $B(\vec{a}, \delta) \subset A_{\bar{t}}$. Esto implica que $B(\vec{a}, \delta) \subset A$, con lo que hemos demostrado que A es abierto.

iii) Demostrar que $\vec{E}$ es abierto es trivial.
Para convencerse que ϕ debe ser un conjunto abierto, basta con decir que al no tener elementos es imposible probar que no es abierto.

Teorema 1.2.2: Si denotamos por $\mathcal{C}$ el conjunto de todas las partes cerradas de un e.v.n. $\vec{E}$, se tendrán las tres propiedades fundamentales siguientes:

i) Si $\{C_i\}_{i=1}^n$ es una familia finita de elementos de $\mathcal{C}$, entonces

$$\bigcup_{i=1}^{n} C_i \in \mathcal{C}$$

ii) Si $\{C_t\}_{t\in T}$ es una familia cualquiera de elementos de $\mathcal{C}$, entonces

$$\bigcap_{t\in T} C_t \in \mathcal{C}$$

iii) $\phi \in \mathcal{C}$ y $\vec{E} \in \mathcal{C}$.

Demostración:

i) Esta propiedad es consecuencia inmediata de la fórmula $[\bigcup_{i=1}^{n} C_i]^c = \bigcap_{i=1}^{n} C_i^c$ y de la parte i) del teorema anterior.

ii) Esta propiedad es consecuencia inmediata de la fórmula $[\bigcap_{t\in T} C_t]^c = \bigcup_{t\in T} C_t^c$ y de la parte ii) del teorema anterior.

iii) Esta propiedad es consecuencia inmediata del hecho que $\phi^c = \vec{E}$ que $\vec{E}^c = \phi$ y de la parte iii) del teorema anterior.

Ejemplo 1.2.3: Para convencerse que las propiedades i) en los teoremas 1.2.1 y 1.2.2 no son en general ciertas para una familia no finita de partes, es suficiente demostrar que en un e.v.n. $\bigcap_{i=1}^{\infty} B'(\vec{a}, 1/i) = \{\vec{a}\}$ y que este conjunto no es abierto y, que $\bigcup_{i=1}^{\infty} B(\vec{a}, \frac{i-1}{i}) = B'(\vec{a}, 1)$ y que este conjunto no es cerrado.

1.3 Interior, adherencia y frontera de un conjunto

Definición 1.3.1: Se llama interior de un conjunto A en un e.v.n. $\vec{E}$ al conjunto:

$$\overset{\circ}{A} := \{\vec{x} \in A : \text{ existe } B(\vec{x}, \delta) \subset A\} \qquad 1.3.1$$

Nota 1.3.1: De la definición anterior se deduce fácilmente que $\overset{\circ}{A}$ es un conjunto abierto contenido en A. Es en efecto, el mayor abierto contenido en A, esto es, la unión de todos los abiertos contenidos en A. Vemos entonces que un conjunto A es abierto si y solo si $A = \overset{\circ}{A}$.

Definición 1.3.2: Se llama adherencia de un conjunto A en un e.v.n. $\vec{E}$ al conjunto:

$$\bar{A} := \{\vec{x} \in \vec{E} : B(\vec{x}, \varepsilon) \cap A \neq \phi \text{ para todo } \varepsilon > 0\} \qquad 1.3.2$$

Nota 1.3.2: De la definición anterior se deduce que $\bar{A}$ es un conjunto cerrado que contiene a A. Es en efecto, el menor cerrado que contiene a A, esto es, la intersección de todos los cerrados que contienen a A. Vemos entonces que un conjunto A es cerrado si y solo si $A = \bar{A}$.

Nota 1.3.3: Dadas dos normas $\| \ \|_1$ y $\| \ \|_2$ en un e.v. $\vec{E}$, el interior de un conjunto $A \subset \vec{E}$ no será necesariamente el mismo si dotamos a $\vec{E}$ de la primera o de la segunda de estas normas.
En la nota 1.3.1 decíamos que el interior de A es el mayor abierto contenido en A y en la nota 1.2.1 decíamos que los conjuntos abiertos son los mismos para dos normas equivalentes. Concluímos entonces que el interior de A es el mismo para dos normas equivalentes.
Del mismo modo, basados en las notas 1.3.2 y 1.2.1 concluímos que la adherencia de un conjunto es le misma para dos normas equivalentes.

1.4 Sucesiones en un e.v.n.

Definición 1.4.1: Diremos que una sucesión $\{\vec{a}_k\}$ en un e.v.n. $\vec{E}$ converge a un elemento $\vec{a} \in \vec{E}$ si para toda bola $B(\vec{a}, \varepsilon)$ existe un entero K tal que $\vec{a}_k \in B(\vec{a}, \varepsilon)$ para todo $k \geq K$. Dicho en otras palabras si:

"*para todo* $\varepsilon > 0$, *existe un entero* K, *tal que* $\|\vec{a}_k - \vec{a}\| \leq \varepsilon$ *para todo* $k \geq K$". 1.4.1

El elemento $\vec{a}$ se llama límite de la sucesión y escribimos

$$\lim_k \vec{a}_k = \vec{a} \quad \text{ o bien } \quad \vec{a}_k \underset{k}{\rightarrow} \vec{a}$$

Nota 1.4.1: Es fácil verificar que el límite de una sucesión convergente es único. En efecto, si $\lim \vec{a}_k = \vec{a}$ y $\lim \vec{a}_k = \vec{a}'$, se tendrá que para todo $\varepsilon > 0$ existen enteros K y

K' tales que, $\|\vec{a}_k - \vec{a}\| \leq \varepsilon/2$ para todo $k \geq K$ y $\|\vec{a}_k - \vec{a}'\| \leq \varepsilon/2$ para todo $k \geq K'$. Si denotamos $\bar{k} := \max\{K, K'\}$ obtenemos

$$\|\vec{a} - \vec{a}'\| \leq \|\vec{a} - \vec{a}_{\bar{k}}\| + \|\vec{a}_{\bar{k}} - \vec{a}'\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Como esta desigualdad se tiene para todo $\varepsilon > 0$, concluimos que $\|\vec{a} - \vec{a}'\| = 0$ y, de acuerdo a la propiedad 1.1.1, que $\vec{a} = \vec{a}'$.

Nota 1.4.2: De acuerdo a lo que decía la nota 1.1.2, podemos deducir que si $\{\vec{a}_k\}$ es una sucesión convergente a un elemento $\vec{a}$ en un e.v.n. $\vec{E}$, la sucesión sigue siendo convergente a $\vec{a}$ si cambiamos la norma de $\vec{E}$ por otra equivalente.

Lema 1.4.1: $\lim\limits_k \vec{a}_k = \vec{a} \iff \lim\limits_k \|\vec{a}_k - \vec{a}\| = 0$

Demostración: $\lim \vec{a}_k = \vec{a} \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists K \in I\!N$ tal que, $\|\vec{a}_k - \vec{a}\| \leq \varepsilon\ \forall k \geq K$
$\iff \lim \|a_k - \vec{a}\| = 0$. Esta última equivalencia se desprende de la definición de convergencia a 0 de una sucesión en $I\!R_+$.

Teorema 1.4.1: Una parte A de un e.v.n. $\vec{E}$ es cerrada si y solo si toda sucesión convergente de elementos de A, tiene su límite en A.

Demostración: En la nota 1.3.2 veíamos que A es un conjunto cerrado si y solo si $A = \bar{A}$. Usaremos este hecho en las dos partes de la demostración.

i) Supongamos que A es un conjunto cerrado y que $\{\vec{a}_k\}$ es una sucesión de elementos de A convergente a un elemento $\vec{a} \in \vec{E}$. Demostremos entonces que $\vec{a} \in A$:

$$\begin{aligned} \{\vec{a}_k\} \text{ en } A \text{ y } \lim \vec{a}_k = \vec{a} &\Rightarrow \{\vec{a}_k\} \text{ en } A \text{ y } \forall \varepsilon > 0\ \exists K \in I\!N \text{ tal que } a_K \in B(\vec{a}, \varepsilon) \\ &\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ B(\vec{a}, \varepsilon) \cap A \neq \phi \Rightarrow \vec{a} \in \bar{A} \end{aligned}$$

Como A es un conjunto cerrado, esta propiedad implica que $\vec{a} \in A$.

ii) Supongamos ahora que A es un conjunto tal que, toda sucesión $\{\vec{a}_k\}$ en A, convergente a un elemento $\vec{a} \in \vec{E}$, verifica que $\vec{a} \in A$. Demostremos entonces que A es cerrado:

$$\begin{aligned} \vec{a} \in \bar{A} &\Rightarrow B(\vec{a}, \varepsilon) \cap A \neq \phi \quad \forall \varepsilon > 0 \\ &\Rightarrow B(\vec{a}, 1/k) \cap A \neq \phi \quad \forall k \in I\!N \\ &\Rightarrow \exists \vec{a}_k \in B(\vec{a}, 1/k) \cap A \quad \forall k \in I\!N \\ &\Rightarrow \{\vec{a}_k\} \text{ está en } A \text{ y } \lim \vec{a}_k = \vec{a} \\ &\Rightarrow \vec{a} \in A \end{aligned}$$

Hemos así demostrado que $\bar{A} \subset A$ y, por lo tanto $A = \bar{A}$ y entonces A es cerrado.

Teorema 1.4.2: Sea $\{\vec{a}_k\}$ una sucesión en $I\!R^n$ y denotemos $\vec{a}_k := (a_k^1, ..., a_k^n)$. La sucesión $\{\vec{a}_k\}$ converge a un elemento $\vec{a} := (a^1, ..., a^n) \in I\!R^n$ si y solo si cada una de las n sucesiones $\{a_k^i\}$ (para $i : 1, ..., n$) converge a $a^i \in I\!R$.

Demostración: De acuerdo a la nota 1.4.2, para demostrar este teorema podemos usar cualquiera de las normas del ejemplo 1.1.1

$$
\begin{aligned}
i) \lim_k \vec{a}_k = \vec{a} &\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists K \in I\!N \text{ tal que, } \|\vec{a}_k - \vec{a}\|_\infty \leq \varepsilon \quad \forall k \geq K, \\
&\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists K \in I\!N \text{ tal que, } |a_k^i - a^i| \leq \varepsilon \;\; \forall i : 1...n \;\; \forall k \geq K \\
&\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists K \in I\!N \text{ tal que, } |a_k^i - a^i| \leq \varepsilon \;\; \forall k \geq K \;\; \forall i : 1, ..., n \\
&\Rightarrow \lim a_k^i = a^i \;\; \forall i : 1...n.
\end{aligned}
$$

ii) $\lim a_k^i = a^i \;\; \forall i : 1...n \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists K_i \in I\!N$ tal que, $|a_k^i - a^i| \leq \varepsilon \;\; \forall k \geq K_i \;\; \forall i : 1...n$. Si definimos $K := \max\{K_i, i : 1...n\}$ vemos que $|a_k^i - a^i| \leq \varepsilon \;\; \forall k \geq K \;\; \forall i : 1...n$ lo que podemos escribir $\|\vec{a}_k - \vec{a}\|_\infty \leq \varepsilon \;\; \forall k \geq K$. Esto demuestra que $\lim \vec{a}_k = \vec{a}$.

Teorema 1.4.3: Sean $\vec{E}_1, ..., \vec{E}_n$ n e.v.n. y sea $\vec{E} = \vec{E}_1 \times ... \times \vec{E}_n$ el e.v.n. producto (ver nota 1.1.4). Sea $\{\vec{a}_k\}$ una sucesión en $\vec{E}$ y denotemos $\vec{a}_k = (\vec{a}_k^1, ..., \vec{a}_k^n)$. La sucesión $\{\vec{a}_k\}$ converge a un elemento $\vec{a} = (\vec{a}^1, ..., \vec{a}^n) \in \vec{E}$, si y solo si cada una de las n sucesiones $\{\vec{a}_k^i\}$ (para $i : 1, ..., n$) converge a $\vec{a}^i \in \vec{E}_i$.

Demostración: De acuerdo a la nota 1.4.2, para demostrar este teorema podemos usar cualquiera de las normas del ejemplo 1.1.5. Usando la norma $\| \; \|_\infty$, la demostración es idéntica a la del teorema anterior.

Teorema 1.4.4: Sean $\{\vec{a}_k\}$ y $\{\vec{b}_k\}$ dos sucesiones en un e.v.n. $\vec{E}$ y sea $r \in I\!R$. Si estas dos sucesiones son convergentes, entonces las sucesiones $\{\vec{a}_k + \vec{b}_k\}$ y $\{r\vec{a}_k\}$ también son convergentes y, se tienen las igualdades

i) $\lim_k(\vec{a}_k + \vec{b}_k) = \lim_k \vec{a}_k + \lim_k \vec{b}_k$ 1.4.1

ii) $\lim_k(r\vec{a}_k) = r \lim_k \vec{a}_k$ 1.4.2

Demostración:

i) Denotemos $\vec{a} := \lim \vec{a}_k$ y $\vec{b} := \lim \vec{b}_k$. De acuerdo al Lema 1.4.1 esto equivale a $\lim \|\vec{a}_k - \vec{a}\| = 0$ y $\lim \|\vec{b}_k - \vec{b}\| = 0$ y, como $\|(\vec{a}_k + \vec{b}_k) - (\vec{a} + \vec{b})\| \leq \|\vec{a}_k - \vec{a}\| + \|\vec{b}_k - \vec{b}\|$, deducimos que $\lim \|(\vec{a}_k + \vec{b}_k) - (\vec{a} + \vec{b})\| = 0$, lo que de acuerdo al mismo lema es equivalente a 1.4.1.

ii) Del Lema 1.4.1 vemos que $\lim_k \vec{a}_k = \vec{a} \Rightarrow \lim \|\vec{a}_k - \vec{a}\| = 0 \Rightarrow |r| \lim \|\vec{a}_k - \vec{a}\| = 0 \Rightarrow \lim |r| \|\vec{a}_k - \vec{a}\| = 0 \Rightarrow \lim \|r\vec{a}_k - r\vec{a}\| = 0 \Rightarrow \lim r\vec{a}_k = r\vec{a}$, que es lo que queríamos probar.

Definición 1.4.2: Diremos que una sucesión $\{\vec{a}_k\}$ de un e.v.n. $\vec{E}$ tiene al elemento $\vec{a} \in \vec{E}$ como punto de acumulación si para toda bola $B(\vec{a}, \varepsilon)$ y todo entero K, existe un entero $\bar{k} \geq K$ tal que, $\vec{a}_{\bar{k}} \in B(\vec{a}, \varepsilon)$. Dicho en otras palabras si

"*para todo* $\varepsilon > 0$ *y todo* $K \in I\!N$ *existe* $\bar{k} \geq K$ *tal que* $\|\vec{a}_{\bar{k}} - \vec{a}\| \leq \varepsilon$"

Nota 1.4.3: Queda claro de las definiciones 1.4.1 y 1.4.2 que si $\lim \vec{a}_k = \vec{a}$, entonces $\vec{a}$ es también punto de acumulación de $\{\vec{a}_k\}$ y es el único. Es fácil ver que una sucesión puede tener muchos puntos de acumulación o ninguno (en esos casos, de acuerdo a la nota 1.4.1, ella no será convergente).

Teorema 1.4.5: Dada una sucesión $\{\vec{a}_k\}$ en un e.v.n. $\vec{E}$, un elemento $\vec{a} \in \vec{E}$ será punto de acumulación de $\{\vec{a}_k\}$ si y solo si existe una subsucesión $\{\vec{a}_{\alpha(k)}\}$ convergente a $\vec{a}$.

Demostración:

i) Sea $\vec{a} \in \vec{E}$ un punto de acumulación de $\{\vec{a}_k\}$. Construyamos una subsucesión $\{\vec{a}_{\alpha(k)}\}$ convergente a $\vec{a}$. Hagámoslo en forma recurrente a partir de $\vec{a}_{\alpha(1)} := \vec{a}_1$. Para esto, definamos $\vec{a}_{\alpha(k+1)}$ a partir de $\vec{a}_{\alpha(k)}$ de la siguiente manera: "$\alpha(k+1)$ es un entero que verifica $\alpha(k+1) > \alpha(k)$ y $\vec{a}_{\alpha(k+1)} \in B(\vec{a}, \frac{1}{k+1})$". La existencia de este $\alpha(k+1)$ es una consecuencia inmediata del hecho que $\vec{a}$ es un punto de acumulación de $\{\vec{a}_k\}$. Vemos que $\{\vec{a}_{\alpha(k)}\}$ es una subsucesión de $\{\vec{a}_k\}$ y, como $\|\vec{a}_{\alpha(k)} - \vec{a}\| \leq 1/k$ para todo k, vemos que $\lim_k \vec{a}_{\alpha(k)} = \vec{a}$.

ii) Sea $\{\vec{a}_{\alpha(k)}\}$ una subsucesión de $\{\vec{a}_k\}$ tal que $\lim \vec{a}_{\alpha(k)} = \vec{a}$. Demostremos que $\vec{a}$ es punto de acumulación de $\{a_k\}$. Sea $\varepsilon > 0$ y $K \in I\!N$. Como $\vec{a}_{\alpha(k)} \to \vec{a}$ existirá $\tilde{K} \in I\!N$ tal que $\vec{a}_{\alpha(k)} \in B(\vec{a}, \varepsilon)$ para todo $k \geq \tilde{K}$. Si definimos $\tilde{k} = \max\{K, \tilde{K}\}$, vemos que

$\alpha(\tilde{k}) \geq K$ y que $\vec{a}_{\alpha(\tilde{k})} \in B(\vec{a}, \varepsilon)$, lo que demuestra que $\vec{a}$ es punto de acumulación de $\{\vec{a}_k\}$.

1.5 Sucesiones de Cauchy

Definición 1.5.1: Una sucesión $\{\vec{a}_k\}$ en un e.v.n. $\vec{E}$ se dirá de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$ existe un entero K tal que $\|\vec{a}_k - \vec{a}_j\| \leq \varepsilon$ para todo $k, j \geq K$.

Nota 1.5.1: De las desigualdades 1.1.4, podemos deducir que si $\{\vec{a}_k\}$ es una sucesión de Cauchy en un e.v.n. $\vec{E}$ ella sigue siendo de Cauchy si cambiamos la norma de $\vec{E}$ por otra equivalente.

Teorema 1.5.1: Toda sucesión convergente en un e.v.n. es de Cauchy.

Demostración: Sea $\vec{a}_k \to \vec{a}$. Dado $\varepsilon > 0$ existirá $K \in I\!N$ tal que $\|\vec{a}_k - \vec{a}\| \leq \varepsilon/2$ para todo $k \geq K$. Entonces $\|\vec{a}_k - \vec{a}_j\| \leq \|\vec{a}_k - \vec{a}\| + \|\vec{a} - \vec{a}_j\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ para todo $k, j \geq K$. Con esto queda demostrado que $\{\vec{a}_k\}$ es de Cauchy.

Nota 1.5.2: Corresponde ahora hacer la pregunta: ¿Es toda sucesión de Cauchy convergente? Los dos teoremas que siguen responderán afirmativamente a esta pregunta en dos casos particulares: i) cuando el e.v.n. $\vec{E}$ es de dimensión finita y, ii) cuando la sucesión de Cauchy tiene un punto de acumulación. Pero en general, la respuesta a esta pregunta no es afirmativa. Veremos más adelante que existen e.v.n. con sucesiones de Cauchy que no convergen. Naturalmente serán e.v.n. de dimensión infinita y la sucesión de Cauchy no convergente no tendrá ningún punto de acumulación.

Teorema 1.5.2: Toda sucesión de Cauchy en $I\!R^n$ es convergente.

Demostración: Sea $\{\vec{a}_k\}$ una sucesión de Cauchy en $I\!R^n$ y denotemos $\vec{a}_k := (a_k^1, ..., a_k^n)$. Según la nota 1.5.1, podemos usar cualquier norma en $I\!R^n$. Entonces, puesto que para todo $i : 1...n$ se tiene que $|a_k^i - a_j^i| \leq \|\vec{a}_k - \vec{a}_j\|_\infty$, es fácil deducir que las n sucesiones $\{a_k^i\}$ son de Cauchy en $I\!R$ y por lo tanto convergentes (esto último fue demostrado en Cálculo). Del teorema 1.4.2. concluimos que $\{\vec{a}_k\}$ es convergente.

Teorema 1.5.3: Si una sucesión de Cauchy en un e.v.n. $\vec{E}$ tiene un punto de acumulación, entonces ella converge a ese punto.

Demostración: Sea $\{a_k\}$ una sucesión de Cauchy. Dado $\varepsilon > 0$, existirá $K \in I\!N$ tal que $\|\vec{a}_k - \vec{a}_j\| \leq \varepsilon/2$ para todo $k, j \geq K$. Si además $\vec{a}$ es punto de acumulación de $\{a_k\}$, existirá $\bar{k} \geq K$ tal que $\|\vec{a}_{\bar{k}} - \vec{a}\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. De lo anterior deducimos que $\|\vec{a}_k - \vec{a}\| \leq \|\vec{a}_k - \vec{a}_{\bar{k}}\| + \|\vec{a}_{\bar{k}} - \vec{a}\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ para todo $k \geq K$. Con esto concluimos que $\vec{a}_k \to \vec{a}$.

Definición 1.5.2: Se llama espacio de Banach a todo e.v.n $\vec{E}$ cuyas sucesiones de Cauchy son siempre convergentes.

Nota 1.5.3: Casi todos los e.v.n. que se usan en los modelos matemáticos de la ingeniería, son espacios de Banach. En particular, de acuerdo al teorema 1.5.2, todo e.v.n. de dimensión finita es de Banach.

1.6 Conjuntos compactos

Definición 1.6.1: Un conjunto A en un e.v.n. $\vec{E}$ se dirá compacto si toda sucesión en A tiene una subsucesión convergente a un elemento de A.

Nota 1.6.1: Del teorema 1.4.5 se desprende que A es compacto si y solo si toda sucesión en A tiene un punto de acumulación en el conjunto A.

Teorema 1.6.1: Toda sucesión de Cauchy en un conjunto compacto de un e.v.n. es convergente.

Demostración: Es una consecuencia inmediata de la nota anterior y del teorema 1.5.3.

Teorema 1.6.2: Todo conjunto compacto en un e.v.n. es cerrado y acotado.

Demostración:

i) Para demostrar que si A es compacto entonces es cerrado, usaremos el teorema 1.4.1. Si $\{\vec{a}_k\}$ es una sucesión de elementos de A convergente a $\vec{a} \in \vec{E}$, como toda subsucesión de $\{\vec{a}_k\}$ también converge a $\vec{a}$, se tendrá obligatoriamente que $\vec{a} \in A$, lo que nos permite concluir que A es cerrado.

ii) Demostremos ahora que si A es compacto entonces es acotado. Razonemos por contradicción. Si A no fuera acotado se tendría que $A \not\subset B(\vec{0}, k)$ para todo $k \in I\!N$, es decir que para todo $k \in I\!N$ existe un elemento $\vec{a}_k \in A \cap B(\vec{0}, k)^c$. Como $\|a_k\| \geq k$ para todo $k \in I\!N$ es evidente que la sucesión $\{a_k\}$ no puede tener una subsucesión convergente. En efecto, cualquiera sea $\vec{a} \in \vec{E}$, si nos damos $K > \|\vec{a}\|$ y $\varepsilon := \frac{K - \|\vec{a}\|}{2}$, vemos que $a_k \notin B(\vec{a}, \varepsilon)$ para todo $k \geq K$. La sucesión $\{\vec{a}\}$ contradice el hecho que A sea compacto.

Teorema 1.6.3: Si A es una parte cerrada y acotada de $I\!R^n$, entonces A es compacta.

Demostración: Sea A un conjunto cerrado y acotado en $I\!R^n$. Sea $\{\vec{a}_k\}$ una sucesión en A. Consideremos en $I\!R^n$ la norma $\| \, \|_\infty$. Sean $\vec{c}_0 \in I\!R^n$ y $r > 0$ tales que $A \subset B(\vec{c}_0, r)$. Dividamos esta bola en 2^n bolas de radio $r/2$ y elijamos aquella que contiene una infinidad de términos de la sucesión $\{\vec{a}_k\}$, denotemosla $B(\vec{c}_1, r/2)$. Dividamos esta nueva bola en 2^n bolas de radio $r/4$ y elijamos aquella que contiene una infinidad de términos de la sucesión $\{\vec{a}_k\}$, denotemosla $B(\vec{c}_2, r/4)$. Construimos así una sucesión encajonada de bolas $B(\vec{c}_k, r/2^k)$ cada una de ellas con una infinidad de términos de la sucesión $\{\vec{a}_k\}$.
Para concluir vamos a demostrar que la sucesión $\{\vec{a}_k\}$ tiene una subsucesión $\{\vec{a}_{\alpha(k)}\}$ que es de Cauchy. Esto nos permitirá, de acuerdo al teorema 1.5.2, concluir que $\{\vec{a}_k\}$ es convergente a un elemento $\vec{a} \in I\!R^n$ y, de acuerdo al Teorema 1.4.1, que $\vec{a} \in A$.
Definamos el entero $\alpha(1)$ de modo que $\vec{a}_{\alpha(1)} \in B(\vec{c}_1, r/2)$ y, en general, definamos para cada $k > 1$ el entero $\alpha(k) > \alpha(k-1)$ de modo que $\vec{a}_{\alpha(k)} \in B(\vec{c}_k, r/2^k)$. Demostremos entonces que $\{\vec{a}_{\alpha(k)}\}$ es de Cauchy. Dado $\varepsilon > 0$ sea $K \in I\!N$ tal que $\varepsilon > r/2^{K-1}$, como la bola $B(\vec{c}_K, r/2^K)$ contiene a todos los $\vec{a}_{\alpha(k)}$ para $k \geq K$ y como su diámetro es $r/2^{K-1}$, concluimos que $\|\vec{a}_{\alpha(k)} - \vec{a}_{\alpha(j)}\| \leq \varepsilon$ para todo $k, j \geq K$.

Teorema 1.6.4: Toda bola cerrada en $I\!R^n$ es compacta.

Demostración: Puesto que toda bola cerrada en un e.v.n. es un conjunto cerrado (ver ejemplo 1.2.2) y acotado, del teorema anterior, concluimos que es compacta.

Teorema 1.6.5: Toda sucesión acotada en $I\!R^n$ tiene una subsucesión convergente.

Demostración: Si $\{\vec{a}_k\}$ es una sucesión acotada, ella debe estar contenida en una bola $B(\vec{0}, r)$ y, como por el teorema anterior sabemos que esta bola es compacta, concluimos que $\{\vec{a}_k\}$ debe tener una subsucesión convergente.

Nota 1.6.2: Más adelante veremos que los tres últimos teoremas no son válidos en un e.v.n. de dimensión infinita. Mostraremos que existen e.v.n. donde la bola $B(\vec{0}, 1)$ no es compacta, lo que equivale a decir que existen sucesiones acotadas sin ningún punto de acumulación.

1.7 Ejercicios

1. i) Dada una norma $\|\ \|$ en $\mathbb{R}^n$ y una matriz no singular P de $n \times n$ demuestre que la función $\|\vec{x}\|_p = \|P\vec{x}\|$ es también una norma en $\mathbb{R}^n$.
   ii) Demuestre que en el e.v. $\mathbb{R}^2$, la función $\|\vec{x}\|_e = \left[\frac{x_1^2}{9} + 4x_2^2\right]^{1/2}$ es una norma. Haga un dibujo de los conjuntos $B(\vec{0}, 1)$ y $B'(\vec{0}, 1)$.

2. Demuestre que en el e.v. $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ de las funciones continuas de $[a, b]$ en $\mathbb{R}$, la función $\|f\|_1 = \int\limits_a^b |f(t)|dt$ es una norma. Demuestre que en el e.v. $I([a, b], \mathbb{R})$ de las funciones integrables de $[a, b]$ en $\mathbb{R}$, la función $\|\ \|$, no es una norma.

3. Demuestre que en el e.v. $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ la función $\|f\|_2 = \left[\int\limits_a^b f(t)^2 dt\right]^{1/2}$ es una norma.

4. Demuestre (usando el teorema fundamental del álgebra) que en el e.v. $\mathcal{P}$ de los polinomios de una variable real, las siguientes funciones son normas

$$\|p\| = \max_{x \in [0,1]} |p(x)|$$

$$\|p\|' = \max\{|\alpha_0|, |\alpha_1|, ..., |\alpha_n|\} \quad (\text{ donde} \quad p(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i)$$

5. Demuestre que en el e.v. ℓ_∞ de las sucesiones reales acotadas, la función $\|\{r_k\}\|_\infty = \sup\limits_{k \in \mathbb{N}} |r_k|$ es una norma.

6. Demuestre que en el e.v. ℓ_1 de las sucesiones reales que verifican "$\sum |r_k|$ convergente", la función $\|\{r_k\}\|_1 = \sum |r_k|$ es una norma.

7. Demuestre que en un e.v.n. todo conjunto formado por un solo elemento es cerrado.

8. Demuestre que en un e.v.n. los únicos conjuntos que son abiertos y cerrados al mismo tiempo, son el conjunto vacío y el espacio entero.

9. Determine el interior y la adherencia de cada uno de los siguientes subconjuntos de $I\!R^2$:

$$\{\vec{x} : x_2 > x_1\}, \{\vec{x} : 0 < \|\vec{x}\|_2 \leq 1\}$$

$$\{\vec{x} : x_1 = x_2 \text{ y } x_1 > 0\}, \{\vec{x} : x_1 \in Q\}, \{(\frac{1}{k}, (-1)^k) : k \in I\!N\}$$

10. Dados dos conjuntos A, B en un e.v.n. $\vec{E}$, demuestre que
    i) $(A \cap B)^\circ = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.
    ii) $(A \cup B)^\circ \supset \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$ (dé un ejemplo donde no hay igualdad).
    iii) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
    iv) $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$ (dé un ejemplo donde no hay igualdad)
    v) $\bar{A} = \overset{\circ}{A} \cup \{\vec{x} \in \vec{E} : B(\vec{x}, \varepsilon) \cap A \neq \phi \text{ y } B(\vec{x}, \varepsilon) \cap A^c \neq \phi \text{ para todo } \varepsilon > 0\}$
    vi) $A \subset B \Rightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ y $\bar{A} \subset \bar{B}$.
    vii) $\overset{\circ}{A} \cap B = \phi \Leftrightarrow \overset{\circ}{A} \cap \bar{B} = \phi$
    viii) $\bar{A} = \vec{E}$ y $\overset{\circ}{B} \cap A = \phi \Rightarrow \overset{\circ}{B} = \phi$
    ix) $(A^c)^\circ = (\bar{A})^c$
    x) $(\overline{A^c}) = (A^\circ)^c$

11. Si definimos la "distancia" de un punto $\vec{x}$ de un e.v.n. $\vec{E}$ a un conjunto $A \subset \vec{E}$ como la cantidad

$$d_A(\vec{x}) = \inf\{\|\vec{x} - \vec{y}\| : \vec{y} \in A\}$$

demuestre que $\bar{A} = \{\vec{x} \in \vec{E} : d_A(\vec{x}) = 0\}$.

12. Si A es un conjunto en un e.v.n. $\vec{E}$ con la propiedad "$\bar{A} = \vec{E}$ y $\overset{\circ}{A} = \phi$", entonces el conjunto A^c (complemento de A) tiene la misma propiedad.

13. En el e.v. $\mathcal{C}([0,1], I\!R)$ dotado de la norma $\| \ \|_1$ (ver problema 2) demuestre que la sucesión $\{f_k\}$ definida por

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ -2^k(x - \frac{1}{2}) + 1 & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^k}] \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{2^k}, 1] \end{cases}$$

es de Cauchy y no es convergente.

14. Demuestre que en el e.v. $\mathcal{A}([0,1], I\!R)$ de las funciones acotadas de $[0,1]$ en $I\!R$, dotado de la norma $\| \, \|_\infty$, la sucesión $\{f_k\}$ definida en el problema anterior es convergente.

15. Demuestre que en el e.v.n. ℓ_1, definido en el problema 6, el conjunto $P = \{\{x_k\} : x_k \geq 0 \quad \forall k \in I\!N\}$ tiene interior vacío.

16. Demuestre que en el e.v.n. ℓ_1, definido en el problema 6, la bola $B(\vec{0}, 1)$ no es compacta.

17. Demuestre que un subconjunto cerrado de un conjunto compacto, es también compacto.

18. Demuestre que la intersección de un conjunto compacto con un conjunto cerrado, es un conjunto compacto.

19. Si $\{A_i\}_{i \in I\!N}$ es una familia de conjuntos compactos en un e.v.n. tal que $\bigcap\limits_{i \in I\!N} A_i = \phi$, entonces existe un número finito de conjuntos de la familia: A_{i_1}, $A_{i_2}, ..., A_{i_n}$, con la propiedad $\bigcap\limits_{j=1}^{n} A_{i_j} = \phi$.

20. Si A es un conjunto compacto en un e.v.n. y si $\{A_i\}_{i \in I\!N}$ es una familia de conjuntos abiertos tales que $\bigcup\limits_{i \in I\!N} A_i \supset A$, entonces existe un número finito de conjuntos de la familia: $A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_n}$, con la propiedad $\bigcup\limits_{j=1}^{n} A_{i_j} \supset A$.

21. Dado el conjunto $A = [0, 1[$ en $I\!R$, encuentre una familia de abiertos $\{A_i\}_{i \in I\!N}$ cuya unión contenga al conjunto A y tal que no exista un número finito de ellos cuya unión contenga a A.

22. Si $\{A_i\}_{i \in I\!N}$ es una familia decreciente de conjuntos compactos (no vacíos) en un e.v.n., demuestre que $\bigcap\limits_{i \in I\!N} A_i \neq \phi$.

23. i) De un ejemplo en $I\!R$ de una familia decreciente de conjuntos acotados (no vacíos) cuya intersección sea vacía.
    ii) De un ejemplo en $I\!R$ de una familia decreciente de conjuntos cerrados (no vacíos) cuya intersección sea vacía.