CONTROL 3: MA22A-01
Cálculo en Varias Variables

Profs. Rafael Correa F.
Jorge A. San Martín H.
Fecha: Miércoles 22 de Junio de 1999.

Problema 1.

i) **(3 ptos.)** Calcule la integral $\displaystyle\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 y e^{x^3} dx dy$.

ii) **(3 ptos.)** Demuestre que en $\mathbb{R}^2$ el conjunto $A = \{(x, x^2) \mid x \geq 0\}$ es medible y que tiene medida nula.

Problema 2.

a) Se desea encontrar una función $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^2$ que resuelva la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0, \quad (c: \text{ constante no nula}).$$

Para ello se propone el cambio de variables $\xi = x + ct$, $\eta = x - ct$, de modo que ϕ se obtenga como $\phi(x,t) = \psi(\xi(x,t), \eta(x,t))$, donde ahora $\psi(\xi, \eta)$ es la incógnita.

i) **(2 ptos.)** Demuestre que

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta \partial \xi}\left(\xi(x,t), \eta(x,t)\right).$$

ii) **(2 ptos.)** Use la propiedad anterior para probar que toda solución ϕ de clase $\mathscr{C}^2$ de la ecuación de ondas se escribe como $\phi(x,y) = f(x+ct) + g(x-ct)$, donde f y g son funciones de una variable.

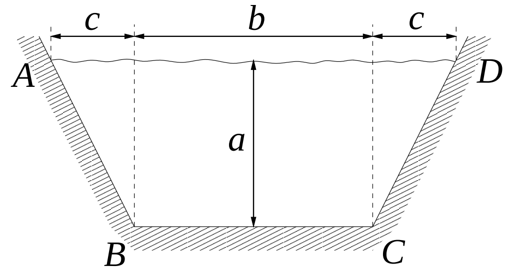
b) **(2 ptos.)** Sea $z = \varphi(x,y)$ la función definida implícitamente mediante la ecuación $z = xf(y/z)$ donde $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Demuestre que $x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + y\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \varphi(x,y)$.

Problema 3. Se necesita construir un canal de sección trapezoidal por el cual fluya un caudal constante $Q = 32[m^3/s]$.

Se sabe que el costo de su construcción $C(a,b,c)$ es proporcional al perímetro mojado del canal, es decir

$$C(a,b,c) = \beta(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD})$$

y que el caudal $Q = 2 \cdot \text{Area}$.
Encuentre el diseño óptimo del canal, que minimiza el costo de construcción y cumple con el requerimiento técnico.



Tiempo **3:00 Horas**