CONTROL 2: MA22A-01
Cálculo en Varias Variables

Profs. Rafael Correa F.
Jorge A. San Martín H.
Fecha: Miércoles 26 de Mayo de 1999.

Problema 1. Considere el espacio vectorial normado E de las funciones continuas de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$, es decir $E = \mathscr{C}([0,1];\mathbb{R})$, dotado de la norma del supremo.

Se define el funcional $J\colon E \to \mathbb{R}$ por $J(f) = \displaystyle\int_0^1 \left(f(x) - x^2\right) f(x)dx$

i) **(2 ptos.)** Calcule la derivada parcial $DJ(f;h)$ $\forall f, h \in E$.

ii) **(2 ptos.)** Demuestre que $DJ(f;\cdot)$ es una funcion lineal y continua de E en $\mathbb{R}$.

iii) **(2 ptos.)** Demuestre que el funcional J es diferenciable.

iv) **(Bonus)** Encuentre $f_0 \in E$ tal que $DJ(f_0) = 0$ y verifique que

$$\forall f \in E, \quad J(f) \geq J(f_0)$$

Sugerencias: Calcule previamente la diferencia $J(f+g) - J(f)$.
En **(iv)** pruebe que $J(f_0 + h) - J(f_0) \geq 0$, $\forall h \in E$ y concluya.

Problema 2.

i) Sea $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable.
Se definen las funciones $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por

$$\begin{aligned} G(t) &= f(t,t,\ldots,t) \\ h(x_1,\ldots,x_n) &= G\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \end{aligned}$$

a) **(2 ptos.)** Calcule $G'(t)$ y $\nabla h(x_1,\ldots,x_n)$ en terminos de las derivadas parciales de f.

b) **(1 pto.)** Pruebe que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (f-h)}{\partial x_i}(x,\ldots,x) = 0$$

ii) **(3 ptos.)** Sean $f(x,y)$ y $g(x,y)$ dos funciones diferenciables de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Se definen las funciones $u(r,\varphi)$ y $v(r,\varphi)$ de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por

$$\begin{aligned} u(r,\varphi) &= \cos\varphi \cdot f(r\cos\varphi, r\,\mathrm{sen}\,\varphi) + \mathrm{sen}\,\varphi \cdot g(r\cos\varphi, r\,\mathrm{sen}\,\varphi) \\ v(r,\varphi) &= -\mathrm{sen}\,\varphi \cdot f(r\cos\varphi, r\,\mathrm{sen}\,\varphi) + \cos\varphi \cdot g(r\cos\varphi, r\,\mathrm{sen}\,\varphi) \end{aligned}$$

Probar que

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial g}{\partial x}(r\cos\varphi, r\,\mathrm{sen}\,\varphi) - \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\varphi, r\,\mathrm{sen}\,\varphi)$$

Problema 3. Considere un espacio de Hilbert H. Sean $a, b \in H$ tales que $b \neq 0$. Considere la recta $L = \{a + \lambda b : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

a) **(1 pto.)** Dado un vector $x \in H$ demuestre que su proyección $p(x)$ sobre la recta L está dada por

$$p(x) = a + \frac{\langle x - a, b\rangle}{\|b\|^2} b$$

b) **(1 ptos.)** Verifique que si $x, y \in H$ son tales que $\langle x - y, b\rangle = 0$ entonces $p(x) = p(y)$.

c) **(1 pto.)** Verifique que $\forall x \in H$, $\forall u \in L$ se cumple que $\|p(x) - u\| \leq \|x - u\|$ y que esta desigualdad es estricta si $x \notin L$.

d) **(1 pto.)** Dado $r > 0$ se define el cilindro generado por la recta L de radio r por

$$C = \{x \in H : \|x - p(x)\| \leq r\}.$$

Demuestre que si $u \in C$ entonces $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ el vector $u + \alpha b \in C$.

e) **(1 pto.)** Dado $x \in H \setminus C$ denotemos por $q(x)$ a la proyección de x sobre C.

Usando la caracterización de la proyección

$$\langle x - q(x), u - q(x)\rangle \leq 0, \ \forall u \in C$$

junto con el resultado **(d)** demuestre que $\langle x - q(x), b\rangle = 0$. Note que con esto y el resultado **(b)** se tiene que $p(q(x)) = p(x)$.

f) **(1 pto.)** Demuestre que $q(x)$ está en la recta L' que pasa por x y $p(x)$.

Indicación. Razonando por contradicción, suponga que $q(x) \in C$ no pertenece a L'. Denotando w al vector proyección de $q(x)$ sobre L', pruebe que w es un vector de C cuya distancia a x es menor que la distancia de $q(x)$ a x.

g) **(0 pto.)** Con todo esto es fácil ver que como $q(x) = p(x) + \mu(x - p(x))$ y $\|q(x) - p(x)\| = r$ entonces $q(x) = p(x) + r\frac{x - p(x)}{\|x - p(x)\|}$.

Tiempo **3:00 Horas**