Cálculo Numérico MA-33A
Lista de Problemas Interpolación Spline

Problema 1 (Spline cúbica)**.** Considere una malla $\{x_0, \ldots, x_n\}$ incluida en el interior del intervalo $[a, b]$ y un conjunto de valores $\{y_0, \ldots, y_n\}$. Se desea construir la función Spline cúbica en $[a, b]$ con respecto a estos datos, siguiendo una estrategia diferente a la vista en clases.

Para determinar esta función Spline $s(x)$, sean $a_0, \ldots, a_n$ los valores de las segundas derivadas de $s(x)$ en los puntos de la malla. Como en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ $s(x)$ es un polinomio de grado 3 entonces $s''(x)$ es un polinomio de grado uno. Es decir (verifíquelo) para cada $x \in [x_{i-1}, x_i]$ se cumple que

$$s''(x) = a_{i-1} \left(\frac{x_i - x}{h_i} \right) + a_i \left(\frac{x - x_{i-1}}{h_i} \right).$$

Integre la ecuación anterior dos veces en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, utilice las condiciones inicial y final $s(x_{i-1}) = y_{i-1}$ y $s(x_i) = y_i$ respectivamente para obtener una fórmula de $s(x)$ en término de los coeficientes a_{i-1}, a_i, y_{i-1} e y_i. Finalmente, a partir del requisito de continuidad de $s'(x)$, obtenga un sistema de ecuaciones para poder calcular los a_j.