Cálculo Numérico MA-33A

Lista de Problemas de Ecuaciones no Lineales

Problema 1. Realice una iteración del metodo de Newton-Raphson para el sistema no lineal $x^2 + y^2 = 4$; $x^2 - y^2 = 1$, partiendo del punto $(x_0, y_0) = (2, 1)$. Grafique en el plano las ecuaciones a resolver y los puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1).

Problema 2. Para resolver la ecuación $x^2 - a = 0$ para $a > 0$ se proponen los tres problemas de tipo punto fijo. Muestre que cada uno es equivalente al problema original, y compare las convergencia de los algoritmos iterativos correspondientes: (a) $x = x + c(x^2 - a)$ para algún $x \neq 0$. (b) $x = a/x$. (c) $x = (x + a/x)/2$.

Problema 3. Demuestre que $x_{n+1} = \cos x_n$ define una sucesión linealmente convergente para cualquier x_0 en $\mathbb{R}$y que su límite esta en $(0, \pi/2)$.

Problema 4. Suponga que para una cierta función $\phi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ la sucesión generada como $x_{n+1} = \phi(x_n)$ converge linealmente hacia $\bar{x}$. Considere tres iteraciones sucesivas x_n, x_{n+1}, x_{n+2} y suponga que existe C tal que

$$\begin{aligned} x_{n+1} - \bar{x} &\approx C(x_n - \bar{x}) \\ x_{n+2} - \bar{x} &\approx C(x_{n+1} - \bar{x}). \end{aligned}$$

Calcule una estimación de $\bar{x}$ a partir de x_n, x_{n+1}, x_{n+2}. Verifique que esta estimación puede ser considerada como un nuevo método iterativo de la forma $y_{n+1} = \psi(y_n)$ donde

$$\psi(y) = \frac{y\phi(\phi(y)) - \phi^2(y)}{y - 2\phi(y) + \phi(\phi(y))}.$$

Demuestre que todo punto fijo de ψ es tambien un punto fijo de ϕ.

Reciprocamente, si $\bar{x}$ es un punto fijo ϕ y $\phi'(\bar{x}) \neq 1$ entonces $\bar{x} = \lim_{x \to \bar{x}} \psi(x)$

Aplique este metodo a las iteraciones del Problema 3 y compare los resultados de ambos métodos.

Problema 5. Muestre que

$$x_{n+1} = \frac{x_n(x_n^2 + 3a)}{3x_n^2 + a}$$

converge con rapidez de orden 3 hacia $\sqrt{a}$.