MA33A Cálculo Numérico

Prof:. Jorge San Martín
e-mail: jorge@dim.uchile.cl

29 Julio 2002

Integral Clásica

$$\boxed{I_{20} = \int_0^1 x^{20} e^{x-1} dx \;\; = ?}$$

Por recurrencia

$$I_{k+1} = \int_0^1 x^{k+1} e^{x-1} dx$$

$$\begin{aligned} u = x^{k+1} \quad &\rightarrow \quad du = (k+1) x^k dx \\ dv = e^{x-1} dx \quad &\rightarrow \quad v = e^{x-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{k+1} &= \left(x^{k+1} e^{x-1} \right) \Big|_0^1 - (k+1) \int_0^1 x^k e^{x-1} dx \\ &= 1 - (k+1) I_k \end{aligned}$$

Además

$$
\begin{aligned}
I_0 &= \int_0^1 e^{x-1} dx \\
&= \left(e^{x-1}\right)\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{e}
\end{aligned}
$$

Resumen

$$
I_k = \int_0^1 x^k e^x dx \Longleftrightarrow \begin{cases} I_0 &= 1 - \frac{1}{e} \\ I_{k+1} &= 1 - (k+1) I_k \end{cases}
$$

Ejemplo

$$
I_1 = 1 - 1 \cdot (1 - \frac{1}{e}) = \frac{1}{e}
$$

Resultados Numéricos: SCILAB

```
I(1)= 1/%e;
for k=1:19 ; I(k+1) = 1 - (k+1) * I(k)  ; end
I
```

Formula Inversa

$$I_{k+1} = 1 - (k+1)I_k$$

$$I_k = \frac{1 - I_{k+1}}{k+1}$$

```
J(30)=0;
for k=29:-1:1 ; J(k) = ( 1-J(k+1) ) / (k+1)   ; end
J(1:20)

k=1:20;
[k' I(k) J(k)]
[k' I(k)-J(k)]
```

k	I_k por recurrencia	Error	I_k "exacto" $(I_{40} = 0)$
0	0.63212055882856	0.00000000000000	0.63212055882856
1	0.36787944117144	0.00000000000000	0.36787944117144
2	0.26424111765712	0.00000000000000	0.26424111765712
3	0.20727664702865	0.00000000000000	0.20727664702865
4	0.17089341188538	-0.00000000000000	0.17089341188538
5	0.14553294057308	0.00000000000000	0.14553294057308
6	0.12680235656152	-0.00000000000001	0.12680235656153
7	0.11238350406936	0.00000000000006	0.11238350406930
8	0.10093196744509	-0.00000000000050	0.10093196744559
9	0.09161229299417	0.00000000000451	0.09161229298966
10	0.08387707005829	-0.00000000004510	0.08387707010339
11	0.07735222935878	0.00000000049612	0.07735222886266
12	0.07177324769464	-0.00000000595339	0.07177325364803
13	0.06694777996972	0.00000007739411	0.06694770257562
14	0.06273108042387	-0.00000108351751	0.06273216394138
15	0.05903379364190	0.00001625276260	0.05901754087930
16	0.05545930172957	-0.00026004420167	0.05571934593124
17	0.05719187059731	0.00442075142831	0.05277111916899
18	-0.02945367075154	-0.07957352570963	0.05011985495809
19	1.55961974427919	1.51189698848298	0.04772275579621
20	-30.19239488558378	-30.23793976965960	0.04554488407582

Misil Anti-Misil

- Durante la guerra del golfo, un Scud iraquí evadió al sistema antimisil matando a 28 soldados.
- En el cálculo de la trayectoria del Scud el sistema necesita calcular diferencias de tiempo Δt.
- El tiempo medido en décimas de segundo se almacena en una **variable entera**.

  Para calcular los intervalos, el registro entero se transformaba a punto flotante multiplicando por 0.1.
- 0.1 no tiene representación exacta en base 2.
  HAY ERRORES en el calculo de t_i.
- Cuando el contador entero crece el error en Δt es amplificado.
  Cuando el sistema ha funcionado por cientos de horas, el error en el intervalo de tiempo puede llegar a ser de $0{,}34$s.

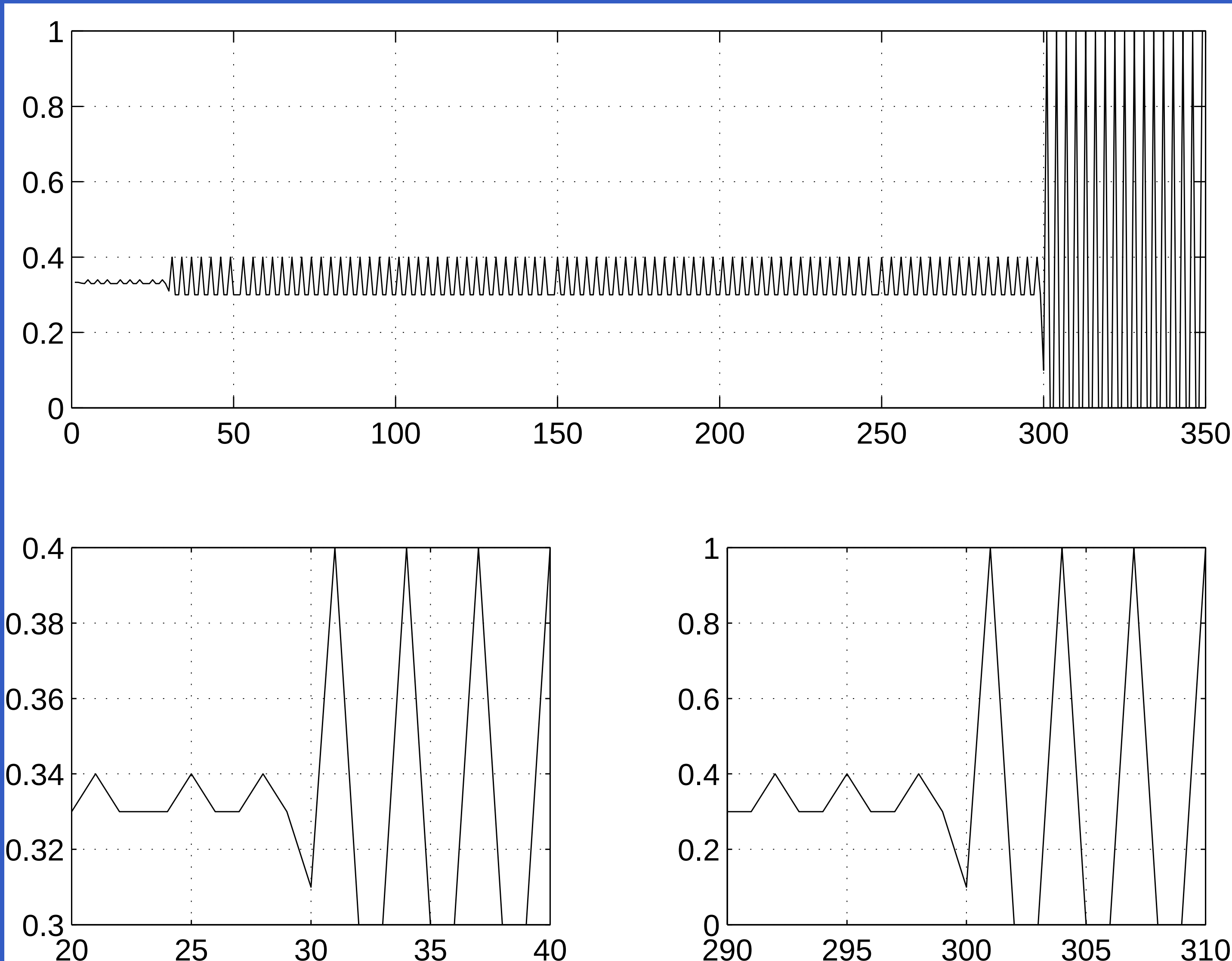
Experencia numérica

- Usemos para simplificar Base 10 con 3 cifras significativas.
- El factor multiplicativo será $\frac{1}{3}$ que no tiene representación exacta con 3 decimales
- $\frac{1}{3} \approx 0{,}333$

i	t_i	Δt
0	0	
1	0.333	0.333
2	0.666	0.333
3	0.999	0.333
4	1.33	0.331
5	1.67	0.340
6	2.00	0.330
7	2.33	0.330
8	2.66	0.330
9	3.00	0.340
10	3.33	0.330
11	3.66	0.330

i	t_i	Δt
30	9.99	0.330
31	10.3	0.310
32	10.7	0.400
33	11.0	0.300
34	11.3	0.300
35	11.7	0.400
36	12.0	0.300
37	12.3	0.300
38	12.7	0.400
39	13.0	0.300
40	13.3	0.300
41	13.7	0.400

i	t_i	Δt
298	99.2	0.300
299	99.6	0.400
300	99.9	0.300
301	100	0.100
302	101	1.00
303	101	0.00
304	101	0.00
305	102	1.00
306	102	0.00
307	102	0.00
308	103	1.00
309	103	0.00


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
50
100
150
200
250
300
350
0.4
0.38
0.36
0.34
0.32
0.3
20
25
30
35
40
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
290
295
300
305
310

Programa del curso

- Aproximación de Números Reales
- Aproximación de Funciones
- Aproximación de Operadores Funcionales (Derivada, Integral)
- Ecuaciones Lineales y No Lineales
- Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Parciales